ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა

ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი ტეფნაძე

დოქტორანტის II სემინარი

„მარტინგალების თეორიის გამოყენება ორობით ანალიზში“

ხელმძღვანელი სრული პროფესორი: უშანგი გოგინავა

თბილისი

2014 წ.

სარჩევი

შესავალი

ორობითი ანალიზის განვითარებაში მნიშვნელოვანი წვრილი მიუძღვის მარტინგალების თეორიასაც. მისი დახმარებით შესაძლებელი ხდება ორობითი მაქსიმალური ფუნქციისთვის სუსტი (1,1) ტიპის დამტკიცება. ასევე დუბის უტოლობის გამოყენებით მტკიცდება ჰარდის სივრცეების და ლებეგის სივრცეების ნორმების ექვივალენტურობა, როცა p>1. მარტინგალების კრებადობის შესახებ ლევის თეორემის გამოყენებით მიიღება უოლშ-ფურიეს მწკრივის თ.ყ. კრებადობა და ლებეგის სივრცეებში შემოსაზღვრულობა გარკვეული ინდექსებისათვის.

მოცემულ ნაშრომში სწორედ ეს კავშირები იქნება გადმოცემული. უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ $\sigma-$ალგებრათა ზრდადი მიმდევრობას, რომლის მიმართაც განიმარტება ორობითი მარტინგალები. დახასიათებული იქნება ამ $\sigma-$ალგებრათა მიმართ ზომადი ფუნქციები. მარტინგალების თეორიის გამოყენებით მიღებულ იქნება ორობით ანალიზში ცნობილი ბევრი კლასიკური შედეგი. ასევე დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ ჰარდის სივრცეების ატომებით წარმოდგენის თეორემას, საიდანაც მარტივად მიიღება ჰარდის სივრცეებზე ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკმარისი პირობები.

თეორიას, რომელის მიმოხილვასაც ისახავს მიზნად მოცემული სტატია, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მათემატიკურ ანალიზში. კლასიკური ორთონორმირებული სისტემების მიმართ ფურიეს მწკრივის სხვადასხვა საშუალოებით შეჯამებადობის და მათი მაქსიმალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის საკითხს დიდი ისტორია გააჩნია. ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები არსებითად განსაზღვრავდნენ და ახლაც განსაზღვრავენ ფუნქციათა თეორიაში და ჰარმონიულ ანალიზში მთელი რიგი მიმართულებების პრობლემატიკას.

ორობითი ჯგუფი

$N_+ -$ით ავღნიშნოთ მთელი დადებით რიცხვების სიმრავლე, $N -$ით მთელი არაუარყოფითი რიცხვების სიმრავლე $N := N_+ \cup \{0\}$, ხოლო R-ით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე.განვიხილოთ დისკრეტული ორობითი ჯგუფი Z_2 :={0,1}, mod(2) შეკრების ოპერაციისმიმართ. Z_2-ზე გვაქვს ჰაარის ზომა, თითოეულ ელემენტის ზომა არის 1/2. G $-$თი ავღნიშნოთ ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი $G = \prod_{k=0}^{\infty} Z_2$.

G -ს ელემენტები წარმოადგენს მიმდევრობებს $x = (x_i, i \in N)$, სადაც $x_i = 0{,}1$, ($i \in N$).მოცემულ ჯგუფზე შეკრების ოპერაცია განიმარტება, როგორც შესაბამისი კოორდინატების mod(2) ჯამი. ზომა (აღნიშნული μ-თი) და ტოპოლოგია არის შესაბამისად ზომებისა და ტოპოლოგიების პირდაპირი ნამრავლი. G-ს ეწოდება უოლშის ჯგუფი. G-ს ქვესიმრავლეებს აქვთ შემდეგი სახე: $I_0 := G$ და

$$I_n(x) := I_n(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) := \{y \in G : y = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, ...)\} \; x \in G, n \in N .$$

ამ სიმრავლეებს ეწოდებათ ორობითი ინტერვალები.

აღვნიშნოთ $I_n := I_n(0)$ და $\overline{I_n} := G \setminus I_n$, $e_n = (0,...,0, x_n = 1,0,...) \in G$, ($n \in N$) .

ყოველი N -თვის გვაქვს ცალსახა წარმოდგენა $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i$, სადაც $n_i = 0{,}1$ და მხოლოდ n_i-ების სასრული რაოდენობა განსხვავდება ნულისგან. თუ $|n| := \max\{ j \in N, n_j = 0\}$, მაშინ $2^{|n|} \le n < 2^{|n|+1}$.

განვიხილოთ p ხარისხსით ინტეგრებად ფუნქციათა სივრცე $L_p(G)$ ნორმით

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_G |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}, \quad (0< p < +\infty).$$

$weak$ - $L_p(G)$ სივრცე შეიცავს ზომად ფუნქციებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{weak-L_p} := \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu(|f| > \lambda) \; < +\infty, \quad (0< p < +\infty).$$

ვთქვათ T სუბწრფივი ოპერატორია. ვიტყვით, რომ მას აქვს სუსტი (p,p) ტიპი, თუ ის შემოსაზღვრულია $L_p(G)$-დან $weak$ - $L_p(G)$-ში, სადაც P>0, ვიტყვით, რომ ოპერატორს აქვს ძლიერი (p,p) ტიპი ან უბრალოდ (p,p) ტიპი, თუ ის შემოსაზღვრულია $L_p(G)$-დან $L_p(G)$-ში, სადაც P>0.

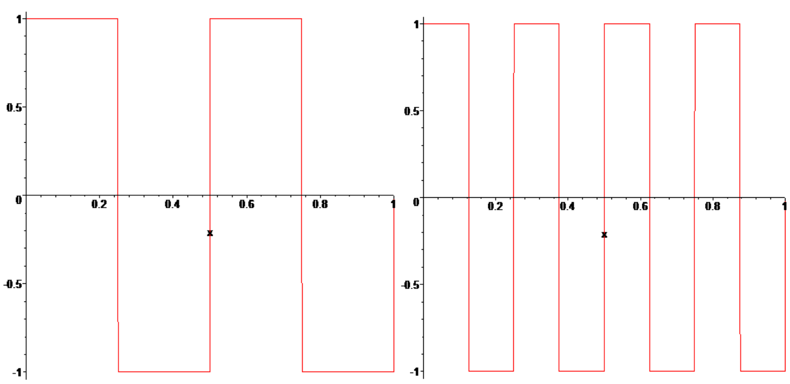
განვმარტოთ k -ური რადემახარის ფუნქცია:

$$r_k(x) := (-1)^{x_k}, \ (k \in N, \ x \in G).$$

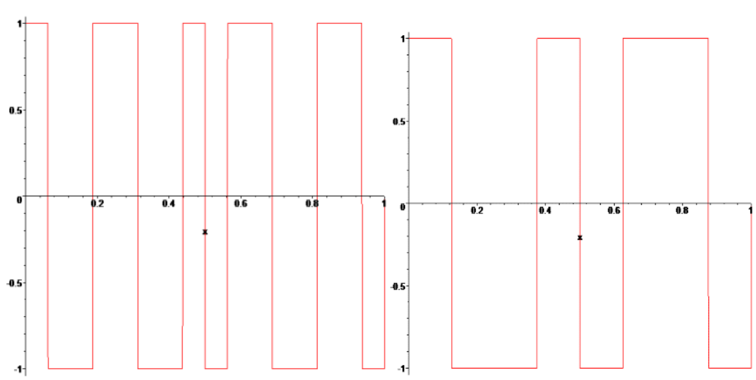
შემდეგ განვსაზღვროთ უოლშის სისტემა, როგორც

$$w_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(x))^{n_k} = r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_k} \quad (n \in N).$$

პროგრამა Maple-ს მეშვეობით ავაგოთ რადემახერის ფუნქციები ღერძზე



ავაგოთ უოლშის ფუნქციები ღერძზე:



ვთქვათ f უწყვეტი ფუნქციაა განსაზღრული G ჯგუფზე. ვიტყვით, რომ f არის ჯგუფის მახასიათებელი თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

და

$$|f(x)|=1.$$

G ჯგუფზე განსაზღრული ყველა მახასიათებელთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $\hat{G}$ -თი. ადვილი დასანახია, რომ თუ $f\in\hat{G}$, მაშინ

$$f(0)=1$$

და

$$f^2(x)=f(x+x)=f(0)=1 \quad (x\in G).$$

მაშასადამე თუ $f\in\hat{G}$, მაშინ ის იღებს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას 1 ან -1.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა (იხილეთ [1])

თეორემა 1. G ჯგუფის მახასიათებელ ფუნქციების სიმრავლე და უოლშის ფუნქციათა სიმრავლე ერთმანეთს ემთხვევა:

$$\hat{G}=\{\psi_n(x):=\prod_{k=0}^{\infty}\rho_k^{n_k}(x): n\in P\}.$$

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ $\psi_n\in\hat{G}$. დავამტკიცოთ პირიქით. ვთქვათ $f\in\hat{G}$. რადგანაც f არის უწყვეტი ფუნქცია G -ზე და $e_i\to 0$ როცა $i\to\infty$ მივიღებთ, რომ

$$f(e_i)\to f(0)=1.$$

მეორეს მხრივ, f იღებს მნიშვნოლებებს $+1$ და -1. მაშასადამე არსებობს $M\in N$ ისეთი, რომ $f(e_i)=1$ როცა $i>M$ და არსებობს მიმდევრობა $n_i=0\vee 1$ ისეთი, რომ $n_i=0, i>M$ და $f(e_i)=(-1)^{n_i}, i\in N$. განსაზღროთ

$$n:=\sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i.$$

განმარტების ძალით გვაქვს

$$f(e_i)=(-1)^{n_i}$$

მეორეს მხრივ

$$\psi_n(e_i)=(-1)^{n_i}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$f(e_i)=\psi_n(e_i)$$

რადგან ნებისმიერი $x\in G$ ადგილი აქვს წარმოდგენას $x=\sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i$, მივიღებთ, რომ

$$f(x)=\psi_n(x), \forall x\in G.$$

თეორემა 2.(იხილეთ [1])ვთქვათ $n,m\in N$, მაშინ

$$\int_G \psi_n(x)\psi_m(x)\,d\mu(x)=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

დამტკიცება.რადგანაც $\psi_n(x)\psi_m(x)=\psi_{n\oplus m}(x)$, სადაც $n\oplus m:=\sum_{k=0}^{\infty}|n_k-m_k|2^k$ საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ

$$\int_G f(x)\,d\mu(x)=0$$

როცა $f\in\hat{G}\setminus\{\psi_0\}$.

მართლაც დაფიქსირებული f -თვის შევარჩიოთ $y\in G$ ისეთი, რომ $f(y)=-1$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\int_G f(x)\,d\mu(x)=\int_G f(x+y)\,d\mu(x)=f(y)\int_G f(x)\,d\mu(x)=-\int_G f(x)\,d\mu(x)$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის დამტკიცება.

განვიხილოთ კერძო ჯამები უოლშის სისტემის მიმართ

$$S_M(f):=\sum_{i=0}^{M-1}\hat{f}(i)w_i,$$

სადაც $\hat{f}(i)$ წარმოადგენს f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს i -ურ კოეფიციენტს:

$$\hat{f}(i):=\int_G f(x)w_i(x)\,d\mu(x).$$

ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

(1) $$S_n(f(x))=\int_G f(t)D_n(x+t)\,d\mu(t),$$

სადაც

$$D_n=\sum_{k=0}^{n-1}w_k,\quad (n\in N)$$

დირიხლეს გული ეწოდება.

თეორემა 3.როგორც ცნობილია(იხილეთ [1,3]) სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

(2) $$D_{2^n}=\begin{cases}2^n, x\in I_n\\ 0, x\notin I_n\end{cases}$$

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ $\psi_k(x)=1$ როცა $x\in I_n(0)$ და $k<2^n$ და მაშასადამე

$$D_{2^n}(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}\psi_k(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}1=2^n, x\in I_n(0).$$

მაშინ გვაქვს

$$\int_{I_n(0)} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = 2^{2n}\mu\left(I_n(0)\right) = 2^n ,$$

მეორეს მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $\{\psi_k\}$ ოწს მივიღებთ

$$\int_{G} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{j=0}^{2^n-1}\int_{G} \psi_i(x)\psi_j(x)d\mu(x) = 2^n .$$

მაშადამე

$$\int_{G} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = \int_{I_n(0)} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) + \int_{G\setminus I_n(0)} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = 2^n$$

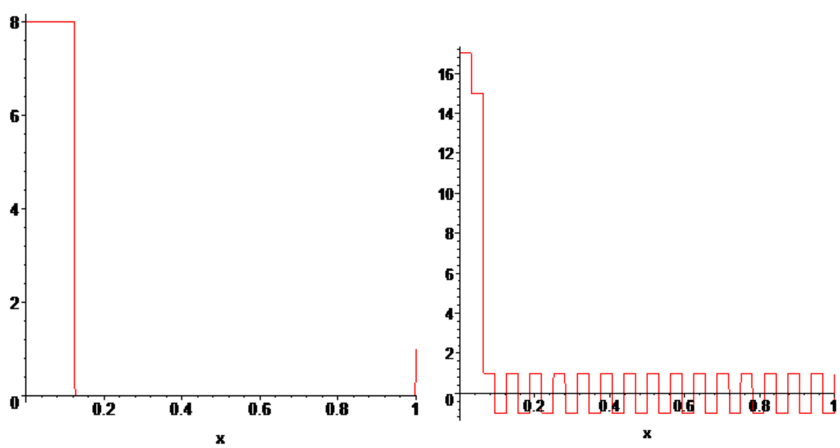
და

$$\int_{G\setminus I_n(0)} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = 0 .$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $D_{2^n}(x) = 0$ როცა $x \in G\setminus I_n(0)$.

ლემა დამტკიცებულია.

ავაგოთ დირიხლეს გულები ღერძზე



პირობითი მათემატიკური ლოდინი და მისი თვისებები

ამ და შემდეგ თავში მოყვანილი განმარტებები, აღნიშვნები და თეორემები მოყვანილია [2]-დან.

ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულია სრული ალბათური სივრცე (Ω, F, P). G არის F $\sigma-$ალგებრის სრული ქვე-$\sigma-$ალგებრა $G \subset F$. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეა, ისეთი რომ $E|\xi| := \|\xi\|_1 < \infty$ და $E|\eta| := \|\eta\|_1 < \infty$ და η G -ზომადია.

η შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება ξ შემთხვევით სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი G $\sigma-$ალგებრის მიმართ და აღინიშნება $[\xi \mid G]$სიმბოლოთი, თუ ნებისმიერი A ხდომილებისთვის G $\sigma-$ალგებრიდან ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$E(\xi\chi_A) := \int_A \xi d\mu(x) = \int_A \eta d\mu(x) =: E(\eta\chi_A).$$

თეორემა 4.თუ η_1 და η_2 შემთხვევითი სიდიდები წარმოადგენენ ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობით მათემატიკურ ლოდინს G $\sigma-$ალგებრის მიმართ, მაშინ $\eta_1 = \eta_2$ P -თ.ყ.

დამტკიცება. განსაზღვრის თანახმად

$$E(\eta_1\chi_A) = E(\eta_2\chi_A), \ \forall \quad A \in G.$$

აქედან

$$E((\eta_1 - \eta_2)\chi_A), \ \forall \quad A \in G.$$

ავღნიშნოთ

$$A \equiv \{\omega : \eta_1(\omega) - \eta_2(\omega) > 0\}.$$

მაშინ ცხადია, რომ $A \in G$ და

$$0 = E((\eta_1 - \eta_2)\chi_A) = E((\eta_1 - \eta_2)\chi_{\{\eta_1 - \eta_2 > 0\}}),$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$E((\eta_1 - \eta_2)\chi_{\{\eta_1 - \eta_2 > 0\}}) = 0 \ P \text{ -თ.ყ.}$$

ე.ი $\eta_1 - \eta_2 \leq 0$ P -თ.ყ. სრულიად ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ $\eta_1 - \eta_2 \geq 0$ P -თ.ყ, რაც მთლიანობაში გვაძლევს, რომ $\eta_1 = \eta_2$ P -თ.ყ.

თეორემა5. დავუშვათ, რომ $D=\{D_1,D_2,...\}$სასრული ან თვლადი დაყოფაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს $D_i:\bigcup_i D_i=\Omega, \quad P(D_i)>0, \quad i\geq 1.$

თუ $G=\sigma(D)$, მაშინ

$$E(\xi\mid D)=E(\xi\mid D_i), \ \ (\text{P-თ.ყ სიმრავლეზე } D_i),$$

ანუ

$$E(\xi\mid D)=\frac{E(\xi D_i)}{P(D_i)}, \ \ (\text{P-თ.ყ სიმრავლეზე } D_i).$$

დამტკიცება. ცნობილია, რომ თუ η $\sigma(D)$-ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ იგი ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობებს დაყოფის ელემენტენზე, ანუ წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\eta(\omega)=\sum_k x_k\chi_{D_k}(\omega).$$

ავღნიშნოთ დაყოფის D_i ელემენტებზე $\sigma(D)$-ზომადი $E(\xi\mid G)$შემთხხვევითი სიდიდის მუდმივი მნიშვნელობა C_k სიმბოლოთი. მაშინ განსაზღვრის თანახმად

$$E\xi\chi_{D_k}=E(E(\xi\mid G))\chi_{D_k}=C_kP(D_k),$$

საიდანაც

$$C_k=\frac{1}{P(D_k)}E\xi\chi_{D_k}=\frac{E\xi\chi_{D_k}}{P(D_k)}=E(\xi\mid D_k).$$

მარტინგალების თეორიიდან ცნობილია შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

თეორემა 6. ვთქვათ $E|\xi|:=\|\xi\|_1<\infty$, $E|\xi_1|:=\|\xi_1\|_1<\infty$, $E|\xi_2|:=\|\xi_2\|_1<\infty$, მაშინ

1. თუ $c=const$, მაშინ $E[c\xi\mid G]=cE[\xi\mid G]$, კერძოდ $E[0\mid G]=0$, (P-თ.ყ).
2. $E\{E[\xi\mid G]\}=E\xi$,
3. $E[\xi_1+\xi_2\mid G]=E[\xi_1\mid G]+E[\xi_2\mid G]$,
4. თუ ξ შემთხვევითი სიდიდე G ზომადია, მაშინ $E[\xi\mid G]=\xi$,
5. (ჭვრეტადობის თვისება) თუ$G_1\subset G$, მაშინ $E\{E[\xi\mid G_1]\mid G\}=E\{E[\xi\mid G]\mid G_1\}=E[\xi\mid G_1]$.

დამტკიცება: 1-4 თვისებები ადვილად მოწმდება განმარტების საფუძველზე, დავამტკიცოთ მე-5 თვისება. ტოლობა $E\{E[\xi\mid G_1]\mid G\}=E[\xi\mid G_1]$ არის მე-4 თვისების შედეგი. იმისთვის, რომ დავამტკიცოთ $E\{E[\xi\mid G]\mid G_1\}=E[\xi\mid G_1]$. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $E[\xi\mid G_1]:=\eta_1$,

$E[\xi \mid G] := \eta.$ რადგანაც ნებისმიერი ხდომილება $A \in G_1$ ამავდროულად არის G σ-ალგებრის ელემენტებიც, ამიტომ განსაზღვრის თანახმად $E\eta\chi_A = E\xi\chi_A = E\eta_1\chi_A$, მაშასადამე $E[\eta \mid G_1] = \eta_1$.

მარტინგალები და ნახევრად მარტინგალები დისკრეტული დროით

ვიგულისხმოთ, რომ მოცემულია სრული ალბათური სივრცე (Ω, F, P) და F $\sigma-$ალგებრის სრულ ქვე-$\sigma-$ალგებრათა ზრდადი ოჯახი $F_k(k \in N)$, k=1,2,…, $F_k \subset F_{k+1} \subset F.$ გარდა ამისა, მოცემულია ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდეები ξ_n, $E|\xi_k| := \|\xi_k\|_1 < \infty, \quad k = 1,2,....$

შემთხვევით სიდიდეთა ξ_n n=1,2,… მიმდევრობას ეწოდება შესაბამისად მარტინგალი, სუბმარტინგალი, სუპერმარტინგალი $\sigma-$ალგებრათა $F_k(k \in N)$, k=1,2,… ნაკადის მიმართ თუ

1. ყოველი n-თვის, n=1,2,… შემთხვევითი სიდიდე ξ_n ზომადია F_n $\sigma-$ალგებრის მიმართ.
2. თითქმის ყველგან სრულდება შემდეგი თანაფარდობები:

$$E(\xi_n \mid F_k) = \xi_k, \quad E(\xi_n \mid F_k) \geq \xi_k, \quad E(\xi_n \mid F_k) \leq \xi_k, \qquad n > k.$$

სუბმარტინგალებს და სუპერმარტინგალებს ნახევრად მარტინგალებს უწოდებენ.

არაუარყოფით, მთელმნიშვნელობიან, შემოსაზღვრულ ფუნქციას $\tau(\omega)$-ს ეწოდება გაჩერების მომენტი $\sigma-$ალგებრათა $F_k(k \in N)$ ნაკადის მიმართ, თუ $\{\omega : \tau(\omega) > n\} \in F_n, (n \in N)$.

თეორემა7. თუ $E|\xi| := \|\xi\|_1 < \infty$, მაშინ $(E[\xi \mid F_n] : n \in N)$ არის მარტინგალი.

დამტკიცება: მოცემული თეორემა პირდაპირ მიიღება ჭვრეტადობის თვისებიდან.

სამართლიანია მარტინგალების შემდეგი კრებადობის თეორემა, რომელსაც დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ:

თეორემა8(ლევი). თუ ξ ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდეა $E|\xi| := \|\xi\|_1 < \infty$, $F_n \subset F_{n+1}, \quad \forall n = 0,1,...$ და $F_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n\right)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} E[\xi \mid F_n] = E[\xi \mid F_\infty], \ \text{(P-თ.ყ)},$$

$$\lim_{n\to\infty} E|E[\xi \mid F_n] - E[\xi \mid F_\infty]| = 0, \ \text{(P-თ.ყ)}.$$

დუბის მიერ დამტკიცებულია შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა:

თეორემა9 (დუბი). დავუშვათ, რომ $(\xi_n \mid F_n)$ არაუარყოფითი მარტინგალია და p>1. მაშინ

$$E\left(\sup_{n\in N}\xi_n\right)^p=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_{n\in N}E\xi_n^p.$$

ოროზითი მარტინგალეზიდა

ძირითადი თეორემების დამტკიცება

$\sigma-$ალგებრა, რომელიც წარმოქმნილია 2^{-k} ზომის მქონე ოროზითი ინტერვალებით $I_k(x)$ $(x\in G)$ ავღნიშნოთ $F_k(k\in N)$-თი, ხოლო F -ით $F=\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)$.

ადვილი სანახავია

$$\mu(I_k(x))=2^{-k}>0,\ \bigcup_x I_k(x)=\Omega,$$

სადაც შედის ზუსტად განსხვანებული 2^k წევრი. ე.ი $F_k(k\in N)$ $\sigma-$ალგებრები აკმაყოფილებენ თეორემა5-ის პირობებს.

თეორემა10.ვთქვათ F_k, $k\in N$ ზემოთ განმარტებული $\sigma-$ალგებრათა ნაკადია. მაშინ ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია

$$f:=\sum_{i=0}^{2^k-1}\alpha_i w_i,\qquad \alpha_i\in R\qquad i=0,1,\dots,2^k-1, \tag{3}$$

არის F_k ზომადი. პირიქითაც, ნებისმიერ F_k ზომად ფუნქცია წარმოიდგინება (3)-ით, ანუ ის წარმოადგენს 2^k-მდე უოლშის ფუნქციების წრფივ კომბინაციაებს.

დამტკიცება: ადვილი სანახავია, რომ $r_l(x):=(-1)^{x_l}$, ($l<k$, $x\in G$)მუდმივ მნიშვნელობებს იღებს F_k $\sigma-$ალგებრის ელემენტებზე. ხოლო რადგან $n<2^k$-თვის $w_n(x):=\prod_{k=0}^{k-1}(r_l(x))^{n_l}$ $(n<2^k)$არის $r_l(x):=(-1)^{x_l}$, $l<k$ რადემახარის ფუნქციების ნამრავლი, ამიტომ $w_n(x),\ n<2^k$ ფუნქციებიც იქნება F_k-ზომადი. უფრო მეტიც წრფივი კომბინაცია $f:=\sum_{i=0}^{2^k-1}\alpha_i w_i,\quad \alpha_i\in R\quad i=0,1,\dots,2^k-1,$ იქნება F_k-ზომადი. პირიქითაც ცნობილია, რომ თუ η $\sigma(I_n(x))$-ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ იგი ღეგულობს მუდმივ მნიშვნელობებს დაყოფის ელემენტენზე, ანუ წარმოიდგინება შემდეგი სახით: $\eta(\omega)=\sum_x\lambda_x\chi_{I_n(x)}(\omega)$. მაგრამ თუ გამოვიყენენთ (2)-ს და უოლშის ფუნქციების თვისებას $w_j(x+\omega)=w_j(x)w_j(\omega)$ მივიღებთ

$$\eta(\omega)=\sum_x \lambda_x \chi_{I_k(x)}(\omega)=\sum_x \lambda_x D_{2^k}(x+\omega)=\sum_x \lambda_x \sum_{j=0}^{2^k-1} w_j(x) w_j(\omega)=\sum_{j=0}^{2^k-1} \alpha_j w_j(\omega).$$

თეორემა11. ვთქვათ f F -ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა, სადაც $F=\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)$.

მაშინ პირობითი მათემატიკური ლოდინი F_k $\sigma-$ალგებრის მიმართ არსებობს, ერთადერთია და ის ემთხვევა f შემთხვევითი სიდიდის 2^k -ურ კერძო ჯამს

$$E(f,F_k)=S_{2^k}(f) \qquad (k\in N).$$

დამტკიცება: თეორემა 10-ის ძალით $S_{2^k}(f(x))$ იქნება F_k -ზომადი.მეორეს მხრივ თეორემა 5-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$S_{2^k}(f(x))=(f*D_{2^k})(x)=\int_G f(t)D_{2^k}(x+t)d\mu(t)$$
$$=\int_{I_k(x)} f(t)D_{2^k}(x+t)d\mu(t)=2^k\int_{I_k(x)} f(t)d\mu(t)=\frac{E(f\chi_{I_k(x)})}{P(I_k(x))}.$$

ამით f ფუნქციის პირობითი მათემატიკური ლოდინის არსებობა დამტკიცებულია. ხოლო ერთადერთობას უზრუნველყოფს თეორემა4.

ავღნიშნოთ $f=\left(f^{(n)},n\in N\right)$ -ით მარტინგალი $F_k(k\in N)$ ნაკადის მიმართ.

თეორემა12. თუ $f\in L_1(G)$, მაშინ$\left(S_{2^n}(f):n\in N\right)$არის მარტინგალი და

$$\left\|S_{2^n}(f)-f\right\|_1\to 0, \quad as \quad n\to\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n}(f)=f, \quad a.e.$$

დამტკიცება: $\left(S_{2^n}(f):n\in N\right)$არის მარტინგალი თეორემების 7-ის და 11-ის ძალით. კრებადობისთეორემები პირდაპირი შედეგია ლევის თეორემისა $\left(S_{2^n}(f):n\in N\right)$მარტინგალისთვის, სადაც $f\in L_1(G)$,თუ გავითვალისწინენთ, იმას რომ ნებისმიერი $f\in L_1(G)$ არის $F=\sigma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k\right)=F_\infty$ ზომადი და ამიტომ $E[\xi\mid f]=f$.

f მარტინგალის მაქსიმალური ფუნქცია განიმარტება შემდეგნაირად

$$f^*=\sup_{n\in N}\left|f^{(n)}\right|.$$

თეორემა13.თუ $f\in L_1(G)$, მაშინ$\left(S_{2^n}(f):n\in N\right)$არის მარტინგალი და

$$f^* = \sup_{n\in N} \frac{1}{\mu(I_n(x))}\left|\int_{I_n(x)} f(u)d\mu(u)\right| = \sup_{n\in N}\left|S_{2^n} f\right|,$$

რაც თავის მხრივ წარმოადგენს $f \in L_1(G)$ ფუნქციის ორობით მაქსიმალურ ფუნქციას.

დამტკიცება: დამტკიცება პირდაპირი შედეგია (1) და (2) ტოლობებისა.

სამართლიანია, შემდეგი თეორემა:

თეორემა 14. ვთქვათ $f \in L_1(G)$. მაშინ

$$\rho\{f^* > \rho\} \le \int_G |f| d\mu.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ გაჩერების მომენტი

$$\upsilon_\rho := \inf\{n \in N, \quad |f_n| > \rho\},$$

პირობითი მათემატიკური ლოდინის თვისებების ძალით მივიღებთ

$$\rho\mu(\upsilon_\rho < \infty) = \rho\sum_{=0}^{\infty}\mu(\upsilon_\rho = k)$$

$$\le \sum_{=0}^{\infty}\int_{\{\upsilon_\rho = k\}}|f_k| d\mu = \sum_{=0}^{\infty}\int_{\{\upsilon_\rho = k\}}\left|S_{2^k} f\right| d\mu$$

$$= \sum_{=0}^{\infty}\int_{\{\upsilon_\rho = k\}}|f| d\mu = \int_{\{\upsilon_\rho < \infty\}}|f| d\mu.$$

მას შემდეგ რაც $\{\upsilon_\rho < \infty\} = \{f^* > \rho\}$, მივიღებთ

$$\rho\{f^* > \rho\} \le \int_{\{\upsilon_\rho < \infty\}}|f| d\mu \le \int_G |f| d\mu.$$

მოცემული თეორემიდან და თეორემა 13-დან ასევე დავასკვნით, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 15. ვთქვათ $f \in L_1(G)$. მაშინ

$$\rho\left\{\sup_{n\in N}\left|S_{2^n} f\right| > \rho\right\} \le \int_G |f| d\mu.$$

საიდანაც თავის მხრივ დგინდება, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 16. ვთქვათ $f \in L_1(G)$. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n}(f) = f, \quad a.e.$$

ჰარდის მარტინგალების სივრცე $H_p(G)$ ($0< p <\infty$) შეიცავს ისეთ მარტინგალებს, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{H_p} := \|f^*\|_p < \infty.$$

შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციას a-ს ეწოდება $p-$ატომი თუ არსებობს ორობითი ინტერვალი I, ისეთი, რომ

$$\int_G a d\mu = 0, \quad \|a\|_\infty \le \mu(I)^{-1/p} \quad \sup p(a) \subset I.$$

ვეისმა [4,5]p-ატომების საშუალებით მოგვცა $H_p(G)$ ($0 < p \le 1$) სივრცეების ახალი დახასიათება, რომელსაც დაუმტკიცებლად მოვიყვათ:

თეორემა 17($Weisz$). მარტინგალი $f = \left(f^{(n)}, n \in N\right)$ ეკუთვნის $H_p(G)$ ($0 < p \le 1$) მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს $p-$ატომების მიმდევრობა $\left(a_k, k \in N\right)$ და ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობა $\left(\mu_k, k \in N\right)$ ისეთი, რომ ყოველი $n \in N$-თვის

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k S_{2^n}(a_k) = f^{(n)}, \quad a.e. \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p < \infty.$$

უფრო მეტიც

$$\|f\|_{H_p} \approx \inf\left(\sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^p\right)^{1/p},$$

სადაც ინფიმუმი აღებულია ყველა შესაძლო წარმოდგენებს შორის, რომელთაც აქვთ (4)-ს სახე.

როდესაც p>1, მაშინ გვაქვს ნორმების ექვივალენტურობა, რომელიც დუბის თეორემის შედეგია, მაგრამ ჩვენ გავყვებით სხვა გზას:

თეორემა 18. ვთქვათ p>1, მაშინ არსებობს იზომორფიზმი $f \to f_* = \left(f^{(n)} = S_{2^n} f, n \in N\right)$და მუდმივები C_p^1 და C_p^2, ისეთი რომ

$$C_p^1 \|f\|_p \le \|f_*\|_{H_p} \le C_p^2 \|f\|_p.$$

დამტკიცება:პირველი უტოლობა ცხადია სრულდება $C_p^1 = 1$-თვის, ხოლო მეორე უტოლობა მიიღება ინტერპოლაციით თეორემა 14-დან:

$$\left\| \sup_{n \in N} \left| S_{2^n} f \right| \right\|_p \leq \| f \|_p, \quad (p > 1)$$

გამოყენებული ლიტერატურა

1.ზაზა გოგინავა, ორობითი ანალიზის საფუძვლები, სალექციო კურსი, თბილისი 2011.

2. ომარ ფურთუხია, შემთხვევით პროცესთა თეორია, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2009.

3.F.Schipp, W.R. Wade, P. Simon. J. Pál, Walsh series, An Introduction to Duadic Harmonic Analysis, Akademiai Kiadó, (Budapest-AdamHilger (Bristol-New-York)), 1990.

4.F. Weisz, Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier Analysis, Springer, Berlin-Heideiberg-New York, 1994.

5.F. Weisz, Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy space, Kluwer Academic, Dordrecht, 2002.