გიორგი თუთბერიძე
თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის
გამოყენებითი მათემატიკის მიმართულების მაგისტრატურის პირველი კურსის სტუდენტი
მეცნ/ხელმძღვანელი: თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი ვახტანგ ცაგარეიშვილი

აბსოლუტურად კრებადობის მამრავლები ფურიეს მწკრივებისათვის

შესავალი

1962 წელს ა.ოლევსკიმ (იხ. [1]) დაამტკიცა, რომ თუ $f(x) \in L_2(0,1)$ ნებისმიერი ფუნქციაა და $(a_n) \in l_2$ ნებისმიერი რიცხვითი მიმდევრობაა, არსებობს ისეთი ორთონორმირებული სისტემა (ონს) $(\varphi_n(x))$, რომ $c_n(f) = c \cdot a_n$, $n = 1,2,\ldots$, ხოლო c არ არის დამოკიდებული n-ზე. ამგვარად თუ ვიგულისხმებთ, რომ $f_0(x) = 1, \quad x \in [0,1]$ და $a_n = \begin{cases} 0, & \text{როცა} \quad n \neq 2^k \\ \frac{1}{\sqrt{k}\log(k+1)}, & \text{როცა}\, n = 2^k, n = 1,2,\ldots \end{cases}$

მაშინ

$$\sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log^2(k+1)} < +\infty$$

ამგვარად არსებობს ისეთი ონს $(\varphi_n(x))$, რომ $a_n = c \cdot c_n(f_0)$. ამის გამო ნებისმიერი $0 < p < 2$ – სთვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f_0)|^p = \frac{1}{|c|^p} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\frac{p}{2}}\, log^p(k+1)} = +\infty$$

ე.ი. არსებობს ისეთი ონს $(\varphi_n(x))$, რომლის მიმართაც 1-ის ფურიეს კოეფიციენტებისგან შედგენილი მწკრივი $p \epsilon (0,2)$ ხარისხში აბსოლუტურად განშლადია.

ზემოაღნიშნულ მოვლენას არ აქვს ადგილი კლასიკური ონს-ებისათვის, როგორიცაა ტრიგონომეტრიული, ჰაარისა და უოლშის სისტემები. ამ სიტემებისათვის, თუ $f \in \mathrm{V}(0,1)$, მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^p < +\infty\,, \text{ როცა } p > 1$$

ზემოაღნიშნული ტიპის მწკრივების აბსოლუტურად კრებადობის საკითხები შესწავლილი იქნა ვ.ცაგარეიშვილის (იხ. [2]) მიერ სასრული ვარიაციის $\mathrm{V}(0,1)$ კლასის ფუნქციებისთვის ზოგადი ონს-ების მიმართ.

შემდეგი რიგის ამოცანა არის ასეთი შინაარსის: თუ $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^p$ არ არის კრებადი $\mathrm{V}(0,1)$ კლასის ფუნქციებისათვის, მაშინ როგორი უნდა იყოს დადებითი შემოსაზღვრული რიცხვითი მიმდევრობა (d_n) , რომელიც უზრუნველყოფს მწკრივის კრებადობას ქვემოაღნიშნული სახით.

განმარტებები, აღნიშვნები და დამხმარე თეორემები

$f: R \to R$ ფუნქციას ჰქვია შემოსაზღვრული ვარიაციის $[a,b]$ სეგმენტზე, თუკი

$$V_f[a,b] = \max_{a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_k < b} \sum_{i=1}^{k-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \infty$$

$\mathrm{V}(0,1)$ აღინიშნება [0,1] მონაკვეთზე სასრული ვარიაციის ყველა ფუნქცითა სიმრავლე.

$\mathrm{V}_0^1(f)$-ით აღინიშნება $f(x)$ ფუნქციის სრული ვარიაცია [0,1]-ზე.

A - თი აღინიშნება [0,1]-ზე აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა კლასი, იგი წარმოადგენს ბანახის სივრცეს ნორმით

$$\|f\|_A = \int_0^1 |f'(x)|dx + \|f\|_c \ ,$$

სადაც $\|f\|_c$ არის $f(x)$ ფუნქციის ნორმა უწყვეტ ფუნქციათა $C(0,1)$ კლასში.

ვთქვათ $(\varphi_n(x))$ არის ონს [0,1]-ზე, მაშინ $f(x)\epsilon L(0,1)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

თეორემა *A*. იმისათვის, რომ $(a_n)\epsilon l_p$ აუცილებელია და საკმარისია, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

იყოს კრებადი ნებისმიერი $(b_n) \in l_q$-სათვის, სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ q>2$

თეორემა *B*: თუ $f(x)$ და $\phi(x)$ ფუნქციები არიან $L_2(0,1)$ კლასიდან და $f(x)$ ღებულობს [0,1]-ის ყოველ წერტილში სასრულ მნიშვნელობებს , მაშინ

$$\int_0^1 f(x)\phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{n}} \phi(x)dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\phi(x)dx + f(1)\int_0^1 \phi(x)dx \qquad (1)$$

განმარტება: (d_k) დადებით რიცხვთა მიმდევრობას ეწოდება აბსოლუტურად კრებადობის მამრავლი რაიმე E ფუნქციონალური კლასის მიმართ p მაჩვენებლით ონს $\left(\varphi_n(x)\right)$-სათვის თუ $\forall f \in E$-სთვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k\,|c_k(f)|^p < +\infty,$$

სადაც

$$c_k(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_k(x)dx$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$K_N(a) = \max_{0\le i\le N}\left|\int_0^{\frac{i}{N}} P_N(a,x)dx\right| = \left|\int_0^{\frac{i_N}{N}} P_N(a,x)dx\right| \qquad (2)$$

სადაც

$$P_N(a,x) = \sum_{n=1}^{N} a_n d_n^{\frac{1}{p}}\,\varphi_n(x) \qquad (3)$$

ძირითადი შედეგის ფორმულირება

თეორემა. ვთქვათ $\varphi_n(x)$ არის ორთონორმირებული სისტემა [0;1]-ზე და

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 0 \qquad (n = m, m+1, \dots)$$

იმისათვის, რომ (d_n) მიმდევრობა იყოს $V(0,1)$ კლასისათვის აბსოლუტურად კრებადობის მამრავლი $p > 1$ მაჩვენებლით აუცილებელია და საკმარისია, რომ $\forall\,(a_n) \in l_q$-სათვის $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ შესრულდეს პირობა

$$K_N = O(1) \tag{4}$$

ძირითადი შედეგის დამტკიცება

ჯერ დავამტკიცოთ საკმარისობა: სამართლიანია ტოლობა (იხ. (1))

$$\int_0^1 \mathrm{f}(x)\Phi(x)dx = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}-1}\left(\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{N}}\right)-\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{N}}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{N}}\Phi(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{N}}\right)\right)\Phi(x)\,dx + f(1)\int_0^1\Phi(x)\,dx \tag{5}$$

სადაც, $\mathrm{f}(x), \Phi(x) \in L_2[0,1]$, ხოლო $f(x)$ სასრულია [0,1]-ის ყოველ წერტილში.

თუ (5) ტოლობაში ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)\epsilon V(0,1), \Phi(x) = P_N(a,x)$ და

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 0, \quad n = m, m+1, \dots$$

მივიღებთ

$$\sum_{n=1}^{N} a_n d_n^{\frac{1}{p}} c_n(f) = \int_0^1 \mathrm{f}(x)P_N(a,x)dx = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}-1}\left(\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{N}}\right)-\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{N}}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{N}} P_N(a,x)dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{N}}\right)\right)P_N(a,x)\,dx = I_1 + I_2 \tag{6}$$

რადგან $f(x)\epsilon\ V(0,1)$ გვექნება

$$|I_1| \le \max_{1\le i\le N}\left|\int_0^{\frac{i}{N}} P_N(a,x)dx\right| \sum_{i=1}^{N-1}\left|\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{N}}\right)-\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{N}}\right)\right| \le \bigvee_0^1(f)\;\; K_N = O(1) \tag{7}$$

შემდეგ

$$|I_2| \leq \sum_{i=1}^{N-1} \sup_{x\epsilon\left[\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right]} \left|f(x) - f\left(\frac{i}{N}\right)\right| \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} |P_N(a,x)|dx \tag{8}$$

გვაქვს, რომ

$$\left|\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} P_N(a,x)dx\right| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\int_0^1 P_N^2(a,x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\ d_n^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ვინაიდან $(a_n)\epsilon l_q$ ამიტომ

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

ე.ი.

$$a_n^2\ d_n^{\frac{2}{p}} < M^2\ , \qquad (n = 1,2,\dots), \quad (M \text{ არ არის დამოკიდებული } n - \text{ზე})$$

ამიტომ

$$\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} |P_N(a,x)|dx \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\ \sqrt{N}\ M = M \tag{9}$$

თუ (9)-ს გავითვალისწინებთ (8)-ში მივიღებთ, რომ $I_2 = O(1)$. აქედან და (7)-დან გვექნება, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, d_n^{\frac{1}{p}}\, c_n(f) < +\infty, \qquad \forall\, f \in V(0,1)$$

ამიტომ, თეორემაA-ს თანახმად

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n\, |c_n(f)|^p < +\infty$$

ამით თეორემის საკმარისობა დამტკიცებულია.

აუცილებლობა: ვიგულისხმოთ, რომ რომელიმე $(b_n) \in l_q$- სთვის $(q > 2)$

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} K_N(b) = +\infty \tag{10}$$

განვიხილოთ ფუნქციათა შემდეგი მიმდევრობა

$$f_N(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{როცა} \quad x \in \left[0, \frac{i_N}{N}\right] \\ 1, & \text{როცა} \quad x \in \left[\frac{i_{N+1}}{N}, 1\right] \\ \text{წრფივია}\,, & \text{როცა} \quad x \in \left[\frac{i_N}{N}, \frac{i_{N+1}}{N}\right] \end{cases}$$

$f_n(x)$-*არის* აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქცია და

$$\|f_N\|_A = \int_0^1 \left|f'_N(x)\right| dx + \|f_N\|_c = \int_{\frac{i_N}{N}}^{\frac{i_{N+1}}{N}} N\, dx + 1 = 2$$

თუ (1) ტოლობაში ვიგულისხმებთ, რომ $f(x) = f_N(x)$, $\phi(x) = P_N(b,x)$ და

$$\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 0, \;\; n = k, k+1, \dots$$

მაშინ გვექნება

$$\int_0^1 f_N(x)\, P_N(\mathrm{b},x)\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(f_N\left(\frac{i}{N}\right) - f_N\left(\frac{i+1}{N}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{N}} P_N(\mathrm{b},x)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}}\left(f_N(x) - f_N\left(\frac{i}{N}\right)\right)P_N(\mathrm{b},x)dx = I_1 + I_2 \qquad (11)$$

f_N ფუნქციის განმარტების თანახმად გვექნება

$$I_1 = -\int_0^{\frac{i_N}{N}} P_N(\mathrm{b},x)dx = -K_N(b)$$

შემდეგ, ისევ f_N ფუნქციის განმარტების თანახმად და კოშის უტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ

$$|I_2| \le \int_{\frac{i_N}{N}}^{\frac{i_{N+1}}{N}} |p_N(\mathrm{b},x)|dx \le \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\int_0^1 p_N{}^2(\mathrm{b},x)\; dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n{}^2\, d_n{}^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{N}}\;\sqrt{N}\; \sup_{0\le n\le 1}\left|b_n d_n{}^{\frac{1}{p}}\right|$$

რადგან $(b_n)\epsilon l_q$ ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

ე.ი. $|b_n| \le M_1$ და რადგან $|d_N| \le M_2$ ამიტომ $I_2 = O(1)$

თუ I_1 –ის და $|I_2|$ –ის შეფასებებს გავითვალისწინებთ (11) – ში, მივიღებთ

$$\left|\int_0^1 f_N(x)P_N(\mathrm{b},x)dx\right| \ge K_N(b) - O(1)$$

(10) – ის თანახმად

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^1 f_N(x)P_N(\mathrm{b},x)dx\right| = +\infty \qquad (12)$$

ვინაიდან

$$A_N(f) = \int_0^1 f(x)P_N(\mathrm{b},x)dx$$

არის წრფივ შემოსაზღვრულ ფუნქციონალთა მიმდევრობა A სივრცეზე, ხოლო $\|f_N\|_A = 2$, ამიტომ ბანახ-შტეინჰაუსის თეორემის თანახმად (12) პირობიდან ვღებულობთ, რომ არსებობს ისეთი $f_0 \in A$ ფუნქცია, რომ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_0^1 f_0(x)P_N(\mathrm{b},x)dx \right| = +\infty \tag{13}$$

ვინაიდან

$$\sum_{n=1}^{N} b_n d_n^{\frac{1}{p}} c_n(f_0) = \int_0^1 f_0(x)P_N(\mathrm{b},x)dx$$

ამიტომ (13)- დან გვაქვს

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{n=1}^{N} b_n d_n^{\frac{1}{p}} |c_n(f_0)| = +\infty$$

თეორემაA-ს ძალით ვღებლობთ, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n |c_n(f_0)|^p = +\infty$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. A.M. Olevskii, On orthogonal series with regard to complete systems (Rus) nath.sb. 58(100) (1962),p.p 707-747
2. V.Tsagareishvili, On the Fourie coefficients for general ortonormal systems Proc. A.Razmadze Math.Inst. 124(2000),p.p 131-150