ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

კომპიუტერულ მეცნიერებათა დეპარტამენტი

გამოყენებითი ინფორმატიკის კათედრა

გვანცა წულაია

ნაშრომი დოქტორანტის II სემინარის კრედიტების მოსაპოვებლად

გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ოპერატორები

სადოქტორო პროგრამა: კომპიუტერული მეცნიერება

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

პროფ. გია სირბილაძე,

ასოც. პროფ. ირინა ხუციშვილი

თბილისი

2014

სარჩევი

შესავალი

ნაშრომი შექმნილია სადოქტორო პროგრამის დოქტორანტის სასემინარო კრედიტების მოპოვების მიზნით. განიხილება სადოქტორო პროექტის ირგვლივ საკვლევი ამოცანების პრობლემატიკის მიმოხილვითი საკითხები.

I თავში წარმოდგენილია საკვლევი თემის მიზნები და ამოცანები.

II თავი დათმობილი აქვს კვლევის მეთოდოლოგიას, სადაც განხილულია საკვლევი თემატიკა შემდეგ საკითხებზე:

1) აგრეგირების ოპერატორების ზოგადი მიმოხილვა;

2) OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორების მიმოხილვა;

3) განზოგადოებული OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორების მიმოხილვა;

4) განუზღვრელ გარემოში გადაწყვეტილების მიღების ერთი მიდგომა დაფუძნებული დემპსტერ–შეიფერის თეორიისა და აგრეგირების ოპერატორების გამოყენებაზე;

III თავი ეთმობა საკვლევი თემის მოსალოდნელ შედეგებს.

ნაშრომი მთავრდება დასკვნით და გამოყენებული ლიტერატურით.

თავი I. კვლევის მიზანი და ამოცანები

გადაწყვეტილების მიღების რთულ ამოცანებში, განუზღვრელ პირობებში, როდესაც ობიექტური მონაცემები არასაკმარისია ან საერთოდ არ არსებობს და არსებული მონაცემები მხოლოდ ექსპერტული ბუნებისაა, საჭიროა შევიმუშაოთ გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების თანამედროვე ინსტრუმენტები (ოპერატორები, სქემები და ა.შ.), რომლებიც კონდენსირებას გაუკეთებენ წარმოდგენილ პოლუსებს (ფაზი–უზუსტობის კატეგორიები, ფაზი–განუზღვრელობის ზომები) შესაძლო გადაწყვეტილებების, ალტერნატივების სკალარულ (რიცხვით) სიდიდეებში. ეს სიდიდეები ქმნიან ალტერნატივების არჩევის ოპტიმალურ გზებს. ცხადია ეს შესაძლებლობები რანჟირებას გაუკეთებს ალტერნატივებს საუკეთესოდან უარესი გადაწყვეტილებისკენ.

დღევანდელ დღეს გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ინსტრუმენტებიდან გამორჩეულია ე.წ. OWA-ს ტიპის ოპერატორები, რომლებიც კლასიკურ ვარიანტში აგრეგირებას უკეთებენ ობიექტურ განუზღვრელ, ალბათურ გარემოს. ჩვენს მიერ განვითარდება OWA-ს ტიპის ახალი განზოგადოებები, როდესაც განუზღვრელობის და უზუსტობის პოლუსები წარმოდგენილი იქნება ფაზი-გარემოში. როგორიცაა: ფაზი-უზუსტობების შემთხვევა, რაც გულისხმობს მონაცემების წარმოდგენას ფაზი-სამკუთხა ან ფაზი-ტრაპეციულ რიცხვებში. ფაზი-განუზღვრელობის პოლუსი კი წარმოდგენილი იქნება ისეთი მონოტონური (ფაზი) ზომებით, როგორიცაა: შესაძლებლობის ზომა, დემპსტერ-შეიფერის ნდობის სტრუქტურა, სუჯენოს λ ზომა და ა.შ.

შესწავლილი იქნება გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ოპერატორები. შესწავლილი იქნება როგორც გასული წლების ასევე თანამედროვე სამეცნიერო ლიტერატურა. აქცენტი გაკეთებული იქნება OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორზე და მათ განზოგადოებებზე განუზღვრელ გარემოში, როდესაც საექსპერტო ინფორმაციის უზუსტობა წარმოდგენილი იქნება ფაზი-სიდიდეებით, ხოლო განუზღვრელობის ზომად კი აღებული იქნება მონოტონური ფაზი ზომები. აგებული იქნება OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორების ისეთი ინფორმაციული ზომები, როგორიცაა ORNESS, BALANS, DEV, ENT და სხვა. შესწავლილი იქნება მათი ანალიზური თვისებები და გამოიყოფა მათი გამოყენებების ასპექტები.

კვლევის მეორე, შემდგომი მიმართულებაა კონკრეტული ევრისტიკული გადაწყვეტილების მეთოდებში ჩვენ მიერ განზოგადოებული აგრეგირების ოპერატორების ჩანერგვა და მათი ტემპორალურ სქემებზე გადაყვანა გადაწყვეტილების მიღების რისკების შემცირების მიზნით. ექსპერტული ინფორმაციის დაზუსტების მიზნით კონსენსუსების გარემოს აგება და მათი წარმოდგენა ექსპერტული ცოდნის წარმოდგენის ტემპორალურ დემპსტერ-შეიფერის სტრუქტურაში.

თავი II. კვლევის მეთოდოლოგია

§2.1. აგრეგირების ოპერატორების ზოგადი მიმოხილვა.

2.1.1. განსაზღვრებები და თვისებები.

2.1.1.1. განსაზღვრება.

აგრეგირების ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ იგი აკავშირებს ობიექტების აგრეგირების n ცალ კორტეჟს, რომელიც შედის მოცემულ სიმრავლეში ამავე სიმრავლის ერთადერთ ობიექტთან. მათემატიკური აგრეგირების ოპერატორის შემთხვევაში ეს სიმრავლე შედგება ნამდვილი რიცხვებისგან. ამ მხრივ, **აგრეგირების ოპერატორი** არის ფუნქცია, რომელიც ნამდვილი რიცხვების ნებისმიერი n-კორტეჟისთვის $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ღებულობს y ნამდვილ მნიშვნელობას:

$$y = Aggreg(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2.1.1.1.1)$$

ბუნებრივია, $Aggreg$ ფუნქციაზე უნდა განისაზღვროს პირობები, რათა გამართლდეს სახელწოდება „აგრეგირების ოპერატორი“ ([16], [36], [40]). ამრიგად, ჩვენ განვმარტავთ აგრეგირების ოპერატორს, როგორც ფუნქციას $Aggreg : \bigcup_{n \in N} [0,1]^n \to [0,1]$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- $Aggreg(x) = x$
- $Aggreg(0, 0, ..., 0) = 0$ და $Aggreg(1, 1, ..., 1) = 1$
- $Aggreg(x_1, x_2, ..., x_n) \le Aggreg(y_1, y_2, ..., y_n)$ თუ $(x_1, x_2, ..., x_n) \le (y_1, y_2, ..., y_n)$

  (იდენტიფიცირება, როდესაც ერთადგილიანი სასაზღვრო პორობები არ მცირდება).

2.1.1.2. აგრეგირების ოპერატორების თვისებები.

აგრეგირების ოპერატორების თვისებები პირობითად შეგვიძლია დავყოთ ორ ჯგუფად: მათემატიკური თვისებები (The mathematical properties) და ქცევითი თვისებები (The behavioral properties) ([12], [13]).

მათემატიკური თვისებები

- სასაზღვრო პირობები (Boundary Conditions)

აქ ჩვენ ვაქცევთ ყურადღებას აგრეგირების ოპერატორის ქცევას საუკეთესო და უარეს შემთხვევაში. ჩვენ ველით, რომ აგრეგირების ოპერატორი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$Aggreg(0,0,....,0)=0 \tag{2.1.1.2.1}$$

$$Aggreg(1,1,....,1)=1 \tag{2.1.1.2.2}$$

(2.1.1.2.1) პირობა ნიშნავს, რომ თუ ჩვენ ვაკვირდებით მხოლოდ ცუდ, მცდარ ან არა დამაკმაყოფილებელ კრიტერიუმებს, მაშინ საერთო აგრეგაცია უნდა იყოს ასევე მთლიანად ცუდი, მცდარი ან არა დამაკმაყოფილებელი. შესაბამისად, (2.1.1.2.2) პირობა ნიშნავს, რომ თუ ჩვენ ვაკვირდებით მხოლოდ ჭეშმარიტ ან სრულიად დამაკმაყოფილებელ კრიტერიუმებს, მაშინ საერთო აგრეგაცია უნდა იყოს ასევე ჭეშმარიტი და სრულიად დამაკმაყოფილებელი.

ზოგიერთი ავტორი აღნიშნავს, რომ ეს თვისებები აგრეგირების ოპერატორების განმარტების ფუნდამენტური თვისებებია [36], ხოლო ზოგიერთი ავტორი გვთავაზობს შემდეგ გაფართოებულ ვარიანტს ფუნდამენტური თვისებებისა [1]:

$$\forall\, x\in[0,1] \quad Aggreg(x,0)=Aggreg(1,0)\cdot x \tag{2.1.1.2.3}$$

$$\forall\, x\in[0,1] \quad Aggreg(x,1)=(1-Aggreg(1,0))\cdot x+Aggreg(1,0) \tag{2.1.1.2.4}$$

უნდა ავღნიშნოთ, რომ (2.1.1.2.3)-ში მოითხოვება, რომ $Aggreg(x,0)$ სიდიდე იყოს x –ის და 0–ის შეწონილი არითმეტიკული საშუალო. შესაბამისად, (2.1.1.2.4)–ში $Aggreg(1,0)$ სიდიდე იქნება x–ის და 1–ის შეწონილი არითმეტიკული საშუალო. ეს ორი პირობა განსაზღვრავს აგრეგირების ოპერატორების დიდ ჯგუფს. ფაქტობრივად, (2.1.1.2.1) და (2.1.1.2.2) წარმოადგენენ კერძო შემთხვევას, როცა $x=0$ და $x=1$ შესაბამისად (2.1.1.2.3) და (2.1.1.2.4)–თვის.

- მონოტონურობა (არაკლებადი) (Monotonicity (non decreasing))

აქ ჩვენ საქმე გვაქვს მკაცრად მონოტინურობასთან (არაკლებადია თითოეული ცვლადისთვის). ჩვენ ველით, რომ თუ არგუმენტი იზრდება, მაშინ საფინალო აგრეგაცია იზრდება (ან რჩება ტოლად):

$$y_i \geq x_i \quad \Rightarrow \quad Aggreg(y_1,....,y_i,....,y_n) \geq Aggreg(x_1,....,x_i,....,x_n) \qquad (2.1.1.2.5)$$

- უწყვეტობა (Continuity)

$Aggreg$ ფუნქცია უწვეტია მისი თვითოეული ცვლადის მიმართ. ეს კი იძლევა საიმედოობის, განსაზღვრული თანმიმდევრულობისა და ქაოტური ქცევის გარანტიას.

- ასოციაციურობა (**Associativity**)

ეს საინტერესო თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ შესაძლებელია პაკეტების შეერთება. ჩვენ ველით, რომ პაკეტების ამორჩევა არ ახდენს გავლენას შედეგზე. სამი არგუმენტისთვის, იგი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$Aggreg(x_1,\ x_2,x_3) = Aggreg(Aggreg(x_1,\ x_2),x_3) = Aggreg(x_1,\ Aggreg(x_2,x_3)) \qquad (2.1.1.2.6)$$

ეს თვისება ხელსაყრელია, თუ ოპერატორი განსაზვრულია მხოლოდ ორი ელემენტისთვის. ამ შემთხვევაში ასოციაციურობა საშუალებას იძლევა იგი გავაფართოვოთ n არგუმენტებით გაურკვევლობისა და ორაზროვნების გარეშე.

- სიმეტრიულობა (**Symmetry**)

ეს თვისება ცნობილია ასევე, როგორც ანონიმურობის თვისება. არგუმენტების თანმიმდევრობა გავლენას არ ახდენს შედეგზე. იგი აუცილებლობას წარმოადგენს, როცა აგრეგირებები კეთდება არგუმენტებისგან, რომელთაც გააჩნიათ ერთიდაიგივე მნიშვნელობა ან წარმოადგენენ ანონიმური ექსპერტების თუ წყაროების შეფასების შედეგს. $\forall \{1,2,...,n\}$ σ გადანაცვლებისთვის ოპერატორი აკმაყოფილებს შემდეგს:

$$Aggreg(x_{\sigma(1)},\ x_{\sigma(2)},...,x_{\sigma(n)}) = Aggreg(x_1,\ x_2,...,x_n) \qquad (2.1.1.2.7)$$

- ბისიმეტრიულობა (**Bisymmetry**)

ბისიმეტრიულობა (სარკისებური სიმეტრია) თვისებაა, რომელიც დაკავშირებულია n^2 შემავალი მონაცემების აგრეგირებასთან n -ური ოპერატორებისთვის. თუ ჩვენ შემავალ მონაცემებს ვაფორმირებთ კვადრატული მატრიცის სახით, მაშინ სარკისებური სიმეტრია ასახავს იმ ფაქტს, რომ არ აქვს მნიშვნელობა, თავდაპირველად აგრეგირებას ვუკეთებთ სვეტების ვექტორებს და

შემდეგ მათ გამოსავალს, თუ პირველად აგრეგირდება სტრიქონების ვექტორი და შემდეგ შესაბამისი გამოსავალი მონაცემები. ამრიგად, A ბინარული ოპერატორისთვის ყველა $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ -თვის სამართლიანია:

$$A(A(x_{11}, x_{12}), A(x_{21}, x_{22})) = A(A(x_{11}, x_{21}), A(x_{12}, x_{22})) \qquad (2.1.1.2.8)$$

შენიშვნა: თუ ოპერატორი კომუტატიური და ასოციაციურია, მაშინ იგი აუცილებლად ბისიმეტრიულია. თუმცა არც კომუტატიურობა და არც ასოციაციურობა არ იგულისხმება ბისიმეტრიულობაში.

- **შთამნთქმელი ელემენტი (Absorbent Element)**

თუ აგრეგირების ოპერატორს გააჩნია **შთამნთქმელი ელემენტი** a, მაშინ იგი შეიძლება გამოყენებულ იქნას, როგორც აღმოფხვრის ანგარიში ან როგორც ვეტო (იგი შეიძლება მიჩნეულ იქნას როგორც საკვალიფიკაციო ანგარიში):

$$Aggreg(x_1, ..., a, ..., x_n) = a \qquad (2.1.1.2.9)$$

ამ ელემენტს ასევე უწოდებენ **გამანადგურებელს (Annihilator)**.

- **ნეიტრალური ელემენტი (Neutral Element)**

თუ აგრეგირების ოპერატორს გააჩნია ნეიტრალური ელემენტი e, მაშინ იგი შეიძლება გამოვიყენებულ იქნას იმ არგუმენტთან დასაკავშირებლად, რომელიც არავითარ გავლენას არ ახდენს აგრეგირებაზე:

$$Aggreg^{[n]}(x_1, ..., e, ..., x_{n-1}) = Aggreg^{[n-1]}(x_1, ..., x_{n-1}) \qquad (2.1.1.2.10)$$

- **იდემპოტენტურობა (Idempotence)**

ეს თვისება ასევე ცნობილია, როგორც ერთპიროვნება ან შეთანხმებულობა. თუ ჩვენ აგრეგირებას ვახდენთ n რაოდენობა ერთიდაიგივე ელემენტზე, ჩვენ ვპოულობთ საწყის ელემენტს:

$$Aggreg(x, x, ..., x) = x \qquad (2.1.1.2.11)$$

ეს თვისება და **გამაძლიერებელი თვისება** (**Reinforcement**) არათავსებადია.

- **კომპენსაცია (Compensation)**

ეს თვისება ცნობილია, როგორც Pareto-ს თვისება. აგრეგირების შეგედი ნაკლებია ყველაზე მაღალ აგრეგირების ელემენტზე (მაქსიმუმი) და მეტია ვიდრე ყველაზე დაბალ აგრეგირების ელემენტზე (მინიმუმი):

$$\min_{i=1}^{n}(x_i) \le Aggreg(x_1, x_2, ..., x_n) \le \max_{i=1}^{n}(x_i) \qquad (2.1.1.2.12)$$

ეს თვისება არ უნდა აგვერიოს გამთანასწორებელ (**Counterbalancement**) თვისებაში.

- გამთანასწორებელი (Counterbalancement)

ზოგიერთი ავტორი უწოდებს როგორც კომპენსაციას. ეს იმას ნიშნავს, რომ გარკვეული უწესრიგობა ჩნდება წინა თვისებასთან მიმართებაში. ჩვენ გამთანასწორებელ თვისებას ვუწოდებთ ოპერატორის ქცევას, რომელიც ამცირებს საფინალო შედეგს თუ არსებობს არგუმენტები, რომლებიც შედიან საპირისპირო მიმართულებით.

$\forall t \in]0,1[, \ \forall (x_1, ..., x_n) \ \exists (y_1, ..., y_m)$

ისეთი, რომ $Aggreg(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = t$ (2.1.1.2.13)

- გამაძლიერებელი (**Reinforcement**)

ერთ-ერთი მახასიათებელი ადამიანური რესურსების ინფორმაციის დამუშავების მრავალი ტიპიდან, რომელიც განხილულია Yager -ისა და Rybalov-ის მიერ [37] იწოდება როგორც სრულად გამაძლიერებელი (**full reinforcement**). ამ თვისებით, ჩვენ გვინდა ყურადღება გავამახვილოთ ტენდეციაზე, რომელიც ერთის მხრივ წარმოადგენს მაღალი ქულების კოლექციას ერთმანეთის გასამყარებლად, რათა მივიღოთ საფინალო ანგარიში, ბევრად დამაჯერებელი, ვიდრე ნებისმიერი ცალ-ცალკე დამოუკიდებლად აღებული ქულა და მეორეს მხრივ, ტენდენცია, რომელიც წარმოადგენს დაბალი ქულების კოლექციას ერთმანეთის გასამყარებლად, რათა მივიღოთ საფინალო ქულა უფრო „disfirmative" ვიდრე რაიმე ინდივიდუალური ქულა. პირველ კონცეფციას უწოდებენ ზევით მიმართულ გამაძლიერებელს (Upward reinforcement), ხოლო მეორე კონცეფციას - ქვევით მიმართულ გამაძლიერებელს (Downward reinforcement). Yager გვიჩვენებს [6], რომ t-ნორმებს გააჩნია გამაძლიერებლის მხოლოდ ქვემოთ მიმართული ქცევა, მაშინ როცა t-კონორმებს გააჩნია გამაძლიერებელის მხოლოდ ზემოთ მიმართული ქცევა. ის ასევე გვიჩვენებს, რომ უნინორმებს გააჩნია სრული გამაძლიერებელი ქცევა.

ეს თვისება ძალიან საინტერესოა. მაგალითად, სამედიცინო დიაგნოსტიკაში მრავალი სიმპტომის გამოჩენა, რომელიც ახასიათებს ავადმყოფობას, იძლევა მეტი დამაჯერებლობის გარანტიას პაციენტის დიაგნოსტირებისას.

- **სტაბილურობა წრფივი ფუნქციისთვის (Stability for a linear function)**

ეს თვისება ახდენს ოპერატორის სტაბილურობას განზომილების მასშტაბის შეცვლისთვის:

$$Aggreg\left(r\cdot x_1+t, r\cdot x_2+t...,...,r\cdot x_n+t\right)=r\cdot\left(Aggreg\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right)+t \qquad (2.1.1.2.14)$$

როცა $r \geq 0$, მაშინ ჩვენ ვსაუბრობთ სტაბილურობაზე დადებითი წრფივი ტრანსფორმაციისთვის. ფართოდ გავრცელებული კერძო შემთხვევაა **თვითდუალურობა (Self-duality)** ([7], [13]). ეს შეესაბამება სტაბილურობას წრფივი ფუნქციისთვის, როცა $r=-1$ და $t=1$.

- **ინვარიანტულობა (Invariance)**

როცა $\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ აგრეგირების რიცხვები წარმოადგენენ განსაზღვრული კრიტერიუმების ზომას, ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ მასშტაბი, რომელშიც იყო წარმოდგენილი ეს ზომები.

ნებისმიერი დასაშვები f ტრანსფორმაციისთვის, გვექნება [9]:

$$Aggreg\left(f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)\right)=f\cdot\left(Aggreg\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right) \qquad (2.1.1.2.15)$$

ქცევითი თვისებები

- **გადაწყვეტილებათა ქცევა (Decisional behavior)**

მოსახერხებელია გვქონდეს შესაძლებლობა განისაზღვროს გადაწტვეტილების მიმღები პირის ქცევა (behavior of DMP). მაგალითად, ტოლერანტული, ოპტიმისტური, მესიმისტური ან მკაცრი. ეს ქცევები არსებობს მრავალ კრიტერიალურ ამოცანებში, რომლებიც ჩვეულებრივ იწოდებიან **დიზიუნქციურ (disjunctive)** და **კონიუნქციურ (conjunctive) ქცევებად**.

- **პარამეტრების ინტერპრეტირება (Interpretability of the parameters)**

ვიმედოვნებთ, რომ პარამეტრებს გააჩნია თითქმის აშკარა სემანტიკური ინტერპრეტაცია. ეს თვისება კრძალავს შავი ყუთის მეთოდოლოგიის გამოყენებას.

- **წონები არგუმენტებზე (Weights on the arguments)**

ძალიან მნიშვნელოვანია გვქონდეს შესაძლებლობა გამოვხატოთ არგუმენტებზე წონები. ეს უკანასკნელი შეიძლება იქნას გააზრებული, როგორც ზოგიერთი არგუმენტისთვის უპირატესობის (პრივილეგიის) მინიჭება.

2.1.2. ძირითადი ოპერატორები.

2.1.2.1. არითმეტიკული საშუალო (The arithmetic mean).

ყველაზე უმარტივესი და ფართოდ გავრცელებული საშუალება აგრეგირების ოპერაციისა არის ჩვეულებრივი საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობის გამოყენება (ასევე ცნობილია, როგორც საშუალო). მათემატიკურად გვაქვს შემდეგი:

$$M(x_1,\, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot x_i\right) \qquad (2.1.2.1.1)$$

ეს ოპერატორი საინტერესოა, რადგან ის იძლევა აგრეგირებულ მნიშნელობას, რომელიც ნაკლებია უდიდეს არგუმენტზე და მეტია უმცირესზე. ამიტომ, საფინალო აგრეგაცია წარმოადგენს შუალედურ მნიშვნელობას ე.წ. „a middle value“. ეს თვისება ცნობილია, როგორც კომპენსაციის თვისება (იხ. სექცია 2.1.1.2.). საშუალოს იყენებენ ხშირად სიმარტივის და იმ თვისებების გამო, რომელსაც იგი აკმაყოფილებს. ესენია: მონოტონურობა, უწყვეტობა, სიმეტრიულობა, ასოციაციურობა, იდემპოტენტურობა და სტაბილურობა წრფივი ტრანსფორმაციისთვის. მაგრამ მას არ გააჩნია არც შთანმთქავი არც ნეიტრალური ელემენტი და არც არანაირი ქცევითი თვისება.

2.1.2.2. წონითი საშუალო (The weighted mean).

აქ არსებობს კლასიკური გაფართოება წონითი ვექტორისა, რომელიც უფლებას იძლევა არგუმენტებზე წონების განთავსებისა, მაგრამ იგი თავისუფალია სიმეტრიულობის თვისებისგან. მათემატიკურად ეს უკანასკნელი ასე გამოიყურება:

$$M_{w_1, w_2, ..., w_n}(x_1,\, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(w_i \cdot x_i\right), \qquad (2.1.2.2.1)$$

სადაც წონები არა უარყოფითია და $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

2.1.2.3. მედიანა (The median).

მეორე ოპერატორი, რომელიც ავითარებს იდეას იყოს „a middle value“ არის მედიანა. ის გულისხმობს არგუმენტების დალაგებას ზრდადობით და შემდეგ შუა ელემენტის ამოღებას. თუ ელემენტების რაოდება არ არის კენტი, მაშინ არ გვაქვს შუა ელემენტი, არამედ საქმე გვაქვს შუა ელემენტების წყვილთან. ჩვენ ვიღებთ ამ წყვილის საშუალო არითმეტიკულს. ეს აგრეგირების ოპერატორი აკმაყოფილებს შემდეგ

თვისებებს: სასაზღვრო პირობები, მონოტონურობა, სიმეტრიულობა, იდემპოტენტურობა და ცხადი ქცევა კომპენსაციისა.

არსებობს ამ ოპერატორის გაფართოება: k-**დალაგებული სტატისტიკა (the k-order statistic)**, რომლითაც ჩვენ შეგვიძლია ავირჩიოთ k-ური ელემენტი დალაგებული სიიდან (უმცირესი ელემენტიდან უდიდესი ელემეტისკენ). დღეისათვის ნაშრომებში წარმოადგენილია უფრო მეტი გაფართოებული ოპერატორები, რომელიც მედიანაზეა დაფუძნებული (The general median-based operators) (Calvo, Mesiar, [4]).

2.1.2.4. მინიმუმი და მაქსიმუმი (The minimum and the maximum).

მინიმუმი და მაქსიმუმი ასევე წარმოადგენენ აგრეგირების ძირითად ოპერატორებს. მინიმუმი იძლევა სიმრავლის ყველაზე პატარა სიდიდეს, ხოლო მაქსიმუმი - ყველაზე დიდ სიდიდეს. ისინი არ იძლევიან „საშუალო ღირებულება“-ს, მაგრამ ისინი შეიძლება იყოს ძალიან მნიშვნელოვანი სხვადასხვა კონტექსტში. მაგალითად, გადაწყვეტილების მიღების კონტექსტში მინიმუმის ოპერატორი ქმნის კონიუნქციურ დამოკიდებულებას (უნდა აღინიშნოს, რომ ეს არის t-ნორმა, ხოლო მაქსიმუმი წარმოადგენს t-კონორმას და გააჩნია დიზიუნქციური ქცევა.

როგორც აგრეგირების ოპერატორები, ისინი აკმაყოფილებენ აქსიომებს (იდენტურობა როცა ერთადგილიანია, სასაზღვრო ამოცანები, არა კლებადობა). ამას გარდა საინტერესოა ამ ორი ოპერატორის ძირითადი თვისებები: მონოტონურობა, სიმეტრიულობა, ასოციაციურობა, იდემპოტენტურობა. მათ გააჩნიათ კომპენსაციის ქცევა, მაგრამ შეზღუდულ ვარიანტებში. როგორც უკვე ავღნიშნეთ, ამ ოპერატორების გამოყენებით ჩვენ ვერასდროს მივიღებთ გასაშუალებულ აგრეგირებულ მნიშვნელობას. ამიტომ ჩვენ არ ვსაუბრობთ კომპენსაციის ქცევაზე ასეთ შემთხვევაში.

თუ ჩვენ ვმუშაობთ შემოსაზღვრულ $[a,b]$ ინტერვალში, მინიმუმს გააჩნია შთანმთქმელი ელემენტისთვის a და ნეტრალური ელემენტისთვის b , ხოლო მაქსიმუმისთვის იქნება საპირისპირო შემთხვევა: a შთანმთქმელი და b ნეიტრალური ელემენტების როლში.

2.1.2.5. წონითი მინიმუმი და წონითი მაქსიმუმი (The weighted minimum and the weighted maximum).

საინტერესოა ამ ოპერატორებისთვის წონების მინიჭება, ისევე როგორც საშუალო არითმეტიკულის შემთხვევაში, მაგრამ აქ არ გვაქვს არანაირი სტანდარტული გადაწყვეტა. მაგალითად, Yager [11] (ასევე Dubois და Prade [7]) გვთავაზობს შემდეგ წონითი მინიმუმის და წონითი მაქსიმუმის ოპერატორებს, სადაც წონები არაუარყოფითია და $\max_{i=1}^{n}(w_i) = 1$:

$$\min^{\oplus}_{w_1,..,w_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \min_{i=1}^{n}\left[\max(1 - w_i, x_i)\right] \tag{2.1.2.5.1}$$

$$\max^{\oplus}_{w_1,..,w_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \max_{i=1}^{n}\left[\min(w_i, x_i)\right] \tag{2.1.2.5.2}$$

ამ ორ ოპერატორს გააჩნია საინტერესო თვისება. თუ $w_i = 0$, მაშინ x_i არგუმენტი არ მიიღება მხედველობაში. ასევე თუ ყველა წონები ტოლია, ჩვენ ვღებულობთ მინიმუმს და მაქსიმუმს შესაბამისად. ეს ოპერატორები კრიტიკის ობიექტები არიან, რადგან შესაძლოა გავზარდოთ ერთ-ერთი წონა (არგუმენტის მნიშვნელობა) რაიმე ცვლილების გარეშე შედეგში. მათემატიკურად ეს ფაქტი ნიშნავს იმას, რომ ეს ოპერატორები არ არიან მკაცრად მონოტონურები წონების მიმართ (not strictly monotone with respect to the weights) (ისინი რა თქმა უნდა მონოტონურია).

Fagin და Wimmers [11] შემოგვთავაზეს ნებისმიერი აგრეგირების ოპერატორისთვის ზოგადი მეთოდი წონების გაერთიანებისათვის. აღნიშნული მეთოდით ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ წონითი მინიმუმის და წონითი მაქსიმუმის ოპერატორებს:

$$\min^{\oplus}_{w_1,..,w_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[i \cdot (w_{\sigma(i)} - w_{\sigma(i+1)}) \cdot \min\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(i)}\right)\right] \tag{2.1.2.5.3}$$

$$\max^{\oplus}_{w_1,..,w_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[i \cdot (w_{\sigma(i)} - w_{\sigma(i+1)}) \cdot \max\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(i)}\right)\right] \tag{2.1.2.5.4}$$

სადაც წონები არაუარყოფითია, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, σ არის გადანაცვლება, რომელიც დაალაგებს წონებს შემდეგნაირად: $w_{\sigma(1)} \ge w_{\sigma(2)} \ge ... \ge w_{\sigma(n)}$ და $w_{\sigma(n+1)} = 0$.

ამ შემთხვევაში ნებისმიერი წონის ცვლილება იწვევს შედეგის ცვლილებას. ავტორები აღნიშნავენ, რომ ეს ოპერატორები სტაბილურია ნებისმიერი დადებითი

წრფივი ტრანსფორმაციისთვის, ისევე როგორც მინიმუმი და მაქსიმუმი; შევნიშნოთ, რომ ეს არის არის ის შემთხვევა, რაც (2.1.2.5.1) და (2.1.2.5.2)-ში.

2.1.3. კვაზი -არითმეტიკული საშუალო (Quasi-arithmetic means).

პრაქტიკაში დანერგილია არითმეტიკული საშუალოს გაფართოებები, როგორიცაა:

გეომეტრიული საშუალო :

$$M_{geometric}(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \qquad (2.1.3.1)$$

და

ჰარმონიული საშუალო:

$$M_{harmonic}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \qquad (2.1.3.2)$$

ფაქტიურად ეს ოპერატორები მიეკუთვნება კვაზი–არითმეტიკული საშუალოების ოჯახს, რომელიც დეტალურად შესწავლილია Kolmogorov-ისა [14] და Aczel-ის [1], [20] მიერ და განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$M_f(x_1, x_2, ..., x_n) = f^{-1}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right] = f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \cdot f(x_i) \right) \right] \qquad (2.1.3.3)$$

სადაც f არის მკაცრად მონოტონური უწყვეტი ფუნქცია. უნდა აღინიშნოს, რომ f გენერატორი არ არის უნიკალური. მაგალითად, შეიძლება განვიხილოთ გენერატორის წრფივი კომბინაცია: $f^{'}(x) = a \cdot f(x) + b$, სადაც $a \neq 0$.

შევნიშნოთ, რომ გეომეტრიული საშუალო (2.1.3.1) წარმოადგენს (2.1.3.3)–ის კერძო შემთხვევას, როცა $f(x) = \log x$, ხოლო ჰარმონიული საშუალო (2.1.3.2) წარმოადგენს (2.1.3.3)–ის კერძო შემთხვევას, როცა $f(x) = \frac{1}{x}$.

განსაკუთრებულ ყურადღებას იპყრობს ის შემთხვევა, როცა არსებობს ისეთი x_i და x_j არგუმენტები, რომ $f(x_i) = -\infty$ და $f(x_j) = +\infty$. ამ შემთხვევაში დამატებით უნდა იყოს განსაზღვრული შეთანხმება მინუს უსასრულობისთვის და პლიუს უსასრულობისთვის.

ყველაზე გავრცელებული კერძო შემთხვევა შესწავლილი იქნა Dujmovic–ის [8] და Dyckhoff –ის [9] მიერ f ფუნქციისთვის, განსაზღვრული შემდეგნაირად: $f : x \to x^{\alpha}$. ჩვენ ვღებულობთ კვაზი–არითმეტიკულ საშუალოს შემდეგი ფორმულირებით:

$$M(x_1, x_2, ..., x_n) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\cdot x_i^{\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.1.3.4)$$

ეს ოჯახი ძალიან საინტერესოა, რადგან ის აზოგადებს საშუალოების ჯგუფს, მხოლოდ α პარამეტრის ცვლილებით:

- თუ $\alpha = 1$, მაშინ ვღებულობთ არითმეტიკულ საშუალოს.
- თუ $\alpha = 2$, მაშინ ვღებულობთ კვადრატულ საშუალოს (ასევე ცნობილია, როგორც ევკლიდეს საშუალო).
- თუ $\alpha = -1$, მაშინ ვღებულობთ ჰარმონიულ საშუალოს.
- როცა α მიისწრაფვის $-\infty$–სკენ, ფორმულა (2.1.3.4) მიისწრაფვის მაქსიმუმი ოპერატორისკენ.
- როცა α მიისწრაფვის $+\infty$–სკენ, ფორმულა (2.1.3.4) მიისწრაფვის მინიმუმი ოპერატორისკენ.
- როცა α მიისწრაფვის 0–სკენ, ფორმულა (2.1.3.4) მიისწრაფვის გეომეტრიული საშუალოსკენ.

2.1.4. სიმეტრიული ჯამი (Symmetric Sum).

სიმეტრიულ ჯამს ვუწოდებთ უწყვეტ თვითდუალურ S ოპერატორს. თვითდუალურობა განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$S(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 - S(1 - x_1, 1 - x_2, ..., 1 - x_n) \quad (2.1.4.1)$$

ეს ოპერატორი დეტალურად შესწავლილია Silvert [7]–ის მიერ. მან გვიჩვენა, რომ ორი არგუმენტის სიმეტრიული ჯამი შეიძლება დავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$S(x, y) = \frac{G(x, y)}{G(x, y) + G(1 - x, 1 - y)} \quad (2.1.4.2)$$

სადაც G არის უწყვეტი, ზრდადი, დადებითი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს $G(0,0) = 0$. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს არ არის უნიკალური ფუნქცია თითოეული

სიმეტრიული ჯამის აღსაწერად. ასევე მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ვიყენებთ შემდეგ შეთანხმებას: $\frac{0}{0}=\frac{1}{2}$.

შევნიშნოთ, რომ სიმეტრიული ჯამი ზოგადად არ არის სიმეტრიული და კომუტატიური. სიმეტრიული ჯამის კარგი მაგალითია წონითი საშუალო.

საინტერესო კერძო შემთხვევას წარმოადგენს დამატება განზოგადოებული აგრეგირების ოპერატორისა (the additive generated aggregation):

$$S_f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] \tag{2.1.4.3}$$

სადაც f გენერატორი არის მკაცრად მონოტონური უწყვეტი ფუნქცია გაფართოებულ ნამდვილ წრფეზე, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგს:

$$f(x)+f(1-x)=0 \tag{2.1.4.4}$$

ამ შემთხვევაში, ჩვენ ვღებულობთ ასოციაციურ სიმეტრიულ ჯამს.

თუ f –ის დიაპაზონია $[-\infty,+\infty]$, მაშინ ჩვენ ვღებულობთ ასოციაციურობას $[0,1]^2\setminus\{(0,1),(1,0)\}$–ზე.

§2.2. OWA–ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორების ზოგადი მიმოხილვა

OWA ოპერატორები (Ordered Weighted Averaging Operators) – დალაგებული წონითი აგრეგირების ოპერატორები გაგვაცნო Yager–მა [39] აგრეგირების ქულების მნიშვნელობების უზრუნველსაყოფად, რომლებიც ასოცირდება მრავალ კრიტერიუმიანი ამოცანების დასაკმაყოფილებლად და რომელიც ერთ ოპერატორში აერთიანებს კონიუნქციურ და დიზიუნქციურ ქცევას:

$$OWA(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} w_j x_{\sigma(j)} \tag{2.2.1}$$

სადაც σ არის გადანაცვლება, რომელიც ელემენტებს ალაგებს შემდეგნაირად: $x_{\sigma(1)}\le x_{\sigma(2)}\le ...\le x_{\sigma(n)}$. ყველა წონა არაუარყოფითია ($w_i\ge 0$) და მათი ჯამი 1–ის ტოლია ($\sum_{i=1}^{n} w_i=1$).

ეს ოპერატორი, როგორც დამტკიცდა, ძალიან მოსახერხებლია მისი მრავალმხრივობის გამო და იგი რედაქტირებული იქნა 1997–ში Yager –ისა და Kacprzyk–ის მიერ [36].

OWA ოპერატორები წარმოადგენენ აგრეგირების ოპერატორების პარამეტრიზებულ ოჯახს, რომელიც მოიცავს ბევრს ცნობილ ოპერატორებს, როგორებიცაა: მაქსიმუმი, მინიმუმი, k–დალაგებული სტატისტიკა, მედიანა და არითმეტიკული საშუალო. ამ ოპერატორების კერძო შემთხვევების მისაღებად ჩვენ უნდა ავარჩიოთ კერძო წონები (იხ. სურ. 2.2.1).

	OWA
Minimum	$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_i = 0 \quad \text{if } i \neq 1 \end{cases}$
Maximum	$\begin{cases} w_n = 1 \\ w_i = 0 \quad \text{if } i \neq n \end{cases}$
Median	$\begin{cases} w_{\frac{n+1}{2}} = 1 & \text{if } n \text{ is odd} \\ w_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \text{ and } w_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2} & \text{if } n \text{ is even} \\ w_i = 0 & \text{else.} \end{cases}$
k-order statistics	$\begin{cases} w_k = 1 \\ w_i = 0 \quad \text{if } i \neq k \end{cases}$
Arithmetic mean	$w_i = \frac{1}{n} \quad \text{for } \forall i$

სურათი 2.2.1. OWA ოპერატორის კერძო შემთხვევები.

OWA ოპერატორები აკმაყოფილებენ კომუტატიურობის, მონოტონურობის, იდემპოტენციურობის თვისებებს. ისინი სტაბილური არიან დადებითი წრფივი ტრანსფორმაციის მიმართ. მათ გაანიათ კომპენსაციის ქცევა. ეს უკანასკნელი თვისება აღნიშნავს იმას, რომ OWA ოპერატორის აგრეგირების შედეგი ყოველთვის მოთავსდება მინიმუმსა და მაქსიმუმს შორის. რაც ეს ოპერატორი განაზოგადებს მინიმუმს და მაქსიმუმს, ეს შეიძლება განვიხილოთ პარამეტრიზებული გზა გადაადგილებისა min

მნიშვნელობიდან max მნიშვნელობისკენ. ამ კონტექსტში Yager–მა [39] შეიმუშავა maxness ხარისხი (იგივე orness), განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$\max ness(w_1, w_2, ..., w_n) = \sum_{j=1}^{n} w_{n-j+1} \cdot \frac{n-j}{n-1} = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \frac{j-1}{n-1} \tag{2.2.2}$$

ჩვენ მხედავთ, რომ, მინიმუმისთვის ჩვენ გვაქვს $\max ness(1,0,...,0) = 0$, ხოლო მაქსიმუმისთვის გვაქვს $\max ness(0,0,...,1) = 1$.

სხვა ოპერატორი იქნა შემუშავებული Yager–ის [39] მიერ და გამოყენებული O'Hagan –ის [21] მიერ OWA ოპერატორის კერძო შემთხვევის დასახასიათებლად. ეს ხარისხი აღწერს წონების დისპერსიას და ის დაფუძნებულია ენტროპიის იდეაზე:

$$dispersion(w_1, w_2, ..., w_n) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \ln(w_j) \tag{2.2.3}$$

ერთ–ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხი ამ ოპერატორების გამოყენებისა მდგომარეობს წონების წარმოშობის შესაბამისი მეთოდოლოგიის განვითარებაში. ორი ყველაზე გავრცელებული მიდგომა მდგომარეობს შემდეგში:

პირველი მათგანი შემუშავდა O'Hagan–ის [21] მიერ და იყენებს maxness–ისა და dispersion-ის ზომებს. ამ მიდგომაში მოითხოვება მხოლოდ ის, რომ მომხმარებელმა უზრუნველყოს $\alpha \in [0,1]$ მნიშვნელობა maxness–ის შესაბამისი ხარისხთან შესაბამისობაში. იდეა მდგომარეობს წონების დისპერსიის მაქსიმიზაციაში ფიქსირებული maxness–ის შეზღუდვით. შემდეგი მათემატიკური დაპროგრამების ამოცანა ითვლის წონებს მოცემული α –თვის (იხ. სურათი 2.2.2).

მეორე მიდგომა აგრეგირებისათვის იყენებს ლინგვისტური კვანტორის ცნებას [40]. ჩვენ ვართ დაინტერესებულები შემდეგნაირად განმარტებული მუდმივად ზრდადი მონოტონური კვანტორებით:

- $Q(0) = 0$ და $Q(1) = 1$.
- თუ $x \le y$, მაშინ $Q(x) \le Q(y)$.

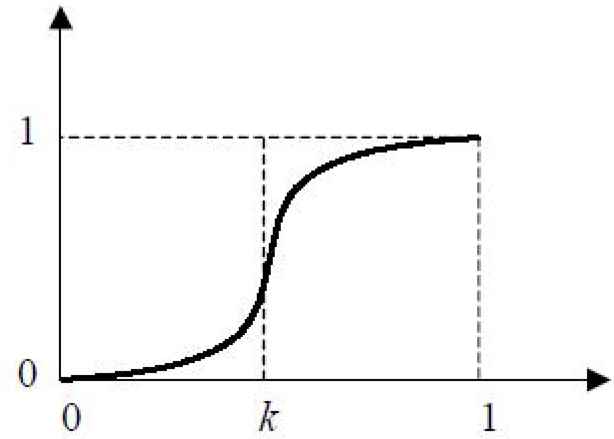
ეს კვანტორები თარგმნის შემდეგ ცნებებს: უმრავლესობა (most), თითქმის ყველა (almost all), ბევრი (many), სულ ცოტა ნახევარი მაინც (at least half) და ზოგიერთი (some).

$$\text{Maximize } -\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \ln(w_j) \text{ (dispersion)}$$

Under the constraints :

- $maxness(w_1, w_2, \ldots, w_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \frac{j-1}{n-1} = \alpha$
- $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$
- $0 \le w_j \le 1$

სურათი 2.2.2. მათემატიკური დაპროგრამების ამონაცა OWA-ს წონების გამოთვლაზე



სურათი 2.2.3. მუდმივად ზრდადი მონოტონური კვანტორი „სულ მცირე k%“.

ამ სახის კვანტორებზე დაყრდნობით Yager–მა [39] შემგვთავაზა წონების გამოსათვლელად შემდეგი ფორმულის გამოყენება:

$$w_j = Q\left(\frac{n-j+1}{n}\right) - Q\left(\frac{n-j}{n}\right) \qquad (2.2.4)$$

ამ მიდგომის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ მიზნის ფუნქცია შემდეგი შეზღუდვით:

Q კრიტერიუმი უნდა იქნეს დაკმაყოფილებული

(*Q criteria should be satisfied*)

ამ მიდგომის საილუსტრაციოს, განვიხილოთ ერთი ზღვრული შემთხვევა. მაგალითად, თუ ჩვენ გვინდა „სულ მცირე 100%“ კრიტერიუმისა იყოს დაკმაყოფილებული, მაშინ ჩვენ შევნიშნავთ, რომ OWA ოპერატორები წარმოადგენენ მინიმუმს და როცა მინიმუმი დაკმაყოფილებულია, მაშინ ყველა სხვა კრიტერიუმი დაკმაყოფილებულია.

§2.3. განზოგადოებული OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორების მიმოხილვა

2.3.1. OWG ოპერატორი.

OWG ოპერატორი დაფუძნებულია OWA ოპერატორსა და გეომეტრიულ საშუალოზე. აქედან გამომდინარე იგი აერთიანებს OWA ოპერატორისა და გეომეტრიულ საშუალოს უპირატესობებს

განმარტება 2.3.1.1. m განზომილებიან OWG ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე: $\Phi^G : R^m \to R$, რომელიც ასოცირებულია წონების სიმრავლესთან ან ექსპონენციალურ წონების ვექტორთან $W = \{w_1, w_2,,,, w_m\}$ და რომელზეც სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $w_i \in [0,1]$
2. $\sum\limits_{i=1}^{m} w_i = 1$

და აგრეგირებისათვის განსაზღვრული მნიშვნელობების სიმრავლისათვის $\{a_1, a_2,,,, a_m\}$ განიმარტება შემდეგი ფორმულით:

$$\Phi^G(a_1, a_2, ..., a_m) = \coprod_{i=1}^{m} c_i w_i \tag{2.3.1.1}$$

სადაც C არის მნიშვნელობების დალაგებული ვექტორი, თითოეული ელემენტისთვის სრულდება პირობა - $c_i \in C$ i-ური უდიდესი ელემენტია $\{a_1, a_2,,,, a_m\}$ ერთობლიობაში.

ამ ოპერატორს გააჩნია შემდეგი თვისებები: შემოსაზღვრულობა, კომუტატიურობა, იდემპოტენციურობა, ზრდადი მონოტონურობა.

2.3.2. GOWA ოპერატორი.

OWA ოპერატორის განვითარების შემდეგი ეტაპია GOWA ოპერატორი [31]. მას გააჩნია დამატებით პარამეტრი, რომლის ხარისხშიც არის აყვანილი არგუმენტების მნიშვნელობა. ფორმულით GOWA ასე გამოისახება: იგი არის n განზომილებიანი აგრეგირების ოპერატორი $F : I^n \to I$ წარმოდგენილი, როგორც:

$$F(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i b_i^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \qquad (2.3.2.1)$$

სადაც $W = \{w_1, w_2,,,, w_m\}$ არის წონების ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს ნორმალიზაციის პირობებს: $w_j \in [0,1]$, $(j = 1,2,...n)$; $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$; b_j არის j -ს უდიდესი რიცხვითი მნიშვნელობა $\{a_1, a_2,,,, a_n\}$ სიმრავლეში. λ არის პარამეტრი, რომელიც მნიშვნელობებს ღებულობს $(-\infty, 0)$ და $(0, +\infty)$ ინტერვალებში. $I = [0,1]$ დახურული ინტერვალია.

GOWA ოპერატორის F ფუნქცია არის კომუტატიური, იდენპოტენციური, შემოსაზღვრული და მონოტონური.

2.3.3. IOWA ოპერატორი.

Yager-მა და Filev-მა [10] წარმოადგინა ახალი OWA -ს ტიპის ოპერატორი, რომელსაც უწოდეს ინდუცირებული დალაგებული შეწონილი გასაშუალების (The induced ordered wighted averaging) – IOWA ოპერატორი.

n განზომილებიან IOWA ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე: $\Phi_w : (R \times R)^n \to R$, რომელთანაც ასოცირებულია წონების სიმრავლე $W = \{w_1, w_2,,,, w_m\}$, ისე , რომ

$$w_i \in [0,1], \ (i = 1,2,...n); \ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

და $U = \{u_1, u_2,,,, u_n\}$ ინდუცირების ვექტორი. იგი განიმარტება შემდეგი ფორმულით:

$$\Phi_w(\langle u_1, p_1 \rangle, ..., \langle u_n, p_n \rangle) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot p_{\sigma(i)} \qquad (2.3.3.1)$$

სადაც $\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ თითოეული გადანაცვლებისთვის სრულდება შემდეგი პირობა: $u_{\sigma(i)} \geq u_{\sigma(i+1)}$, $\forall i = 1,2,...,n-1$ ე.ი. $\langle u_{\sigma(i)}, p_{\sigma(i)} \rangle$ ეს არის მეორე წყვილი, რომელშიც $u_{\sigma(i)}$ $\forall i$ -თვის არის i -ური უდიდესი მნიშვნელობა $\{u_1, u_2,,,, u_n\}$ სიმრავლეში. აგრეგირებისათვის განსაზღვრულ დალაგებულ მნიშვნელობების სიმრავლეში $\{p_1, p_2,,,, p_n\}$ სიმრავლე არის დაზუსტების აღწერა, რომელიც კავშირშია $\{u_1, u_2,,,, u_n\}$ მნიშვნელობების სიმრავლესთან. ამ ყველაფერს Yager-მა და Filev-მა უწოდეს

დალაგებული დაზუსტებული არგუმენტები $\{p_1, p_2,,,, p_n\}$, რომელიც წარმოადგენს ძირითად განსხვავებას OWA და IOWA ოპერატორებს შორის.

2.3.4. IGOWA ოპერატორი.

Yager-მა და Filev-მა (1999) წარმოგვიდგინა ახალი - IGOWA ოპერატორი, რომელიც არის OWA ოპერატორის განზოგადოება და რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება:

n განზომილებიან IGOWA ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე: $IGOWA: R^n \times R^n \to R$, რომელთანაც ასოცირებულია წონების სიმრავლე $W = \{w_1, w_2,,,, w_m\}$, ისე , რომ

$w_j \in [0,1]$, $(j = 1,2,...n)$; $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ და იგი განიმარტება შემდეგი ფორმულით:

$$IGOWA(\langle u_1, a_1 \rangle, ..., \langle u_n, a_n \rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \qquad (2.3.4.1)$$

სადაც b_j არის a_i -ის IGOWA-ს $\langle u_i, a_i \rangle$ წყვილის მნიშვნელობა, რომელშიც არის j ჯერადი უდიდესი მნიშვნელობა u_i -ს; u_i არის დალაგებული ინდუცირებული ცვლადი, a_i არის ცვლადი არგუმენტი და λ არის პარამეტრი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, გარდა $\lambda = 0$.

2.3.5. IOWG ოპერატორი.

n განზომილებიან IOWG ოპერატორი წარმოადგენს ფუნქციას $\Phi_w^G : (R \times R^+)^n \to R^+$, რომელთანაც ასოცირებულია წონების სიმრავლე $W = \{w_1, w_2,,,, w_m\}$ და მათზე სრულდება პირობა $w_i \in [0,1]$, $(i = 1,2,...n)$; $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ და ის არის განსაზღვრული აგრეგირებისათვის მეორე არგუმენტის სიმრავლეზე, რომელიც თავის მხრივ არის წყვილი დამოკიდებულებების სიმრავლე $\{\langle u_1, a_1 \rangle, \langle u_2, a_2 \rangle, ..., \langle u_n, a_n \rangle\}$, რაც საფუძველია დადებითი შედეგისა. ამის მიხედვით განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულება:

$$\Phi_w^G(\langle u_1, a_1 \rangle, ..., \langle u_n, a_n \rangle) = \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i)})^{w_i} \qquad (2.3.5.1)$$

სადაც $\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ თითოეული გადანაცვლებისთვის სრულდება შემდეგი პირობა: $u_{\sigma(i)} \geq u_{\sigma(i+1)}, \forall i = 1,2,...,n-1$ ე.ი. $\langle u_{\sigma(i)}, p_{\sigma(i)} \rangle$ ეს არის ისეთი წყვილი დამოკიდებულება, სადაც $u_{\sigma(i)}$ არის უდიდესი მნიშვნელობა $\{u_1, u_2,,,, u_n\}$ სიმრავლეში.

2.3.6. POWA ოპერატორი.

ალბათური დალაგებული შეწონილი გასაშუალების (POWA) [25] ოპერატორი არის გაფართოება OWA ოპერატორისა. POWA ოპერატორის გამოყენება მოსახერხებელია ისეთ შემთხვევაში, როდესაც ჩვენ გვაქვს ალბათური ინფორმაცია. ეს მიდგომა წარმოადგენს მიმართებას OWA ოპერატორსა და ალბათობებს შორის.

n განზომილებიანი POWA ოპერატორი არის მიმართება $POWA: R^n \rightarrow R$, რომელთანაც ასოცირებულია წონების n განზომილებიანი ვექტორი $W = \{w_1, w_2,,,, w_m\}$, სადაც სრულდება პირობა $w_j \in [0,1],\ (j = 1,2,...n);\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ და სამართლიანია ფორმულა:

$$POWA(a_1, a_2,.., a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j \cdot b_j \qquad (2.3.6.1)$$

სადაც b_j არის j-ური უდიდესი ელემენტი ერთობლიობაში a_i (ეს იმას ნიშნავს, რომ წონები დალაგებულია კლებადობით). თითოეულ a_i არგუმენტთან ასოცირებულია შესაძლებლობები v_i, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ და $v_i \in [0,1]$, $\hat{v} = \beta w_j + (1-\beta) v_j$, სადაც $\beta \in [0,1]$ და v_j არის ალბათობა, რომელიც დალაგებულია b_j-ს მსგავსად. ასევე შესაძლებელია POWA ოპერატორის ფორმულირება ისე, რომ დაიყოს ორ ნაწილად: OWA ოპერატორად და იმ ნაწილად, რომელზეც ახდენს გავლენას ალბათური განაწილება, რომლის განმარტება ასეთია:

POWA ოპერატორი არის დამოკიდებულება $POWA: R^n \rightarrow R$ n განზომილებით, რომელსაც გააჩნია ასოცირებული შეწონილი ვექტორი $W = \{w_1, w_2,,,, w_n\}$, სადაც $w_j \in [0,1],\ (j = 1,2,...n);\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ და ალბათობების ვექტორი V, რომელზეც სრულდება პირობა $v_i \in [0,1],\ (i = 1,2,...n);\ \sum_{i=1}^{n} v_i = 1$. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი ფორმულა:

$$POWA(a_1, a_2,.., a_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot a_i \qquad (2.3.6.2)$$

სადაც b_j არის j-ური უდიდესი ელემენტი ერთობლიობაში a_i და $\beta \in [0,1]$.

2.3.7. AsPOWA ოპერატორი.

OWA ოპერატორი, რომელიც ზემოთ ავღნიშნეთ პირველად განმარტებული იყო Yager-ის მიერ, მისი ალბათური განზოგადოების ერთი ვარიანტი POWA წარმოადგინა José M. Merigó-მ [25], სადაც გარდა ობიექტური წონებისა ფაქტორებზე არსებობს მათი განხორციელების ალბათობები, ფაქტიურად POWA არის OWA-ს და ალბათური მოლოდინის შეწონილი, რომელიც შემდეგი ფორმულით განიმარტება:

$$POWA(a_1, a_2, .., a_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot a_i \ .$$

ხშირად პრაქტიკულ ამოცანებში ფაქტორებზე ალბათური განაწილება არ არის ცნობილი. ეს მაშინ ხდება როდესაც ახალი ამოცანები იგეგმება, განსაკუთრებით ეს სტრატეგიულ მენეჯმენტში გვხდება, სადაც ფაქტორები -განხორციელების ხარისხები უნდა იყოს შეფასებული. გამოიყენება ისეთი მიდგომა, როდესაც ფაქტორებს სუბიექტური ალბათობები მიეწერება ექსპერტების მიერ. სწორედ ასეთი ამოცანებია განხილული Merigó -ს კვლევებში [25] POWA-ს გამოყენებებზე განხილულ მაგალითებში, სადაც პირდაპირ ანიჭებენ სუბიექტურ ალბათობებს. როგორც სუბიექტური განუზღვრელობის წამყვანი მკვლევარები R.R.Yager, Robert Fuller და სხვა ადასტურებენ, ბუნებრივი იქნებოდა სუბიექტურ ალბათობათა ნაცვლად გამოყენებული იქნას შესაძლებობითი ხარისხები ფაქტორების განხორციელების ხარისხებისთვის. პირველად შესაძლებლობითი ანალიზი ფაზი-სიმრავლეებზე დაყრდნობით წარმოადგინა Zadeh-მ, ხოლო შემდეგი განვითარება ჰპოვა Dubois და Prade-ს შრომებში და დღეს მის გამოყენებას სუბიექტურ ინფორმაციულ ანალიზში დიდი ადგილი უკავია.

შესაძლებლობითი განაწილება წარმოშობს შესაძლებლობით ზომას. Pos(A) რომელიც განიმარტება $\pi : S \to [0,1]$ შესაძლებლობითი განაწილებით: $Pos(A) = \max_{s \in A} \pi(s)$. განვმარტოთ S_m , როგორც ყველა გადანაცვლების სიმრავლე $\{1, 2, ..., m\}$ და ასევე $\{P_\sigma\}_{\sigma \in S_m}$, როგორც Pos - შესაძლებლობითი ზომის ასოცირებული ალბათობების კლასი [2-4]. არსებობს კავშირი (π_i)-სა და $\{P_\sigma\}_{\sigma \in S_m} : \forall \sigma \in S_m$ -ს შორის:

$$P_\sigma\left(s_{\sigma(i)}\right) = \max_{\nu=\overline{1,i}} \pi(s_{\sigma(\nu)}) - \max_{\nu=\overline{1,i-1}} \pi(s_{\sigma(\nu)}),$$

თითოეულისათვის სრულდება პირობა $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(m)) \in S_m$, $\{P_\sigma\}_{\sigma \in S_m}$ ასოცირებული ალბათობებია.

განვმარტოთ დეტერმინისტული საშუალო აგრეგირების ფუნქცია $M : R^k \Rightarrow R \ (k = m!)$.

ასოცირებული შესაძლებლობითი OWA ოპერატორი [25] m განზომილებით არის მიმართება $AsFPOWA : R^m \Rightarrow R$, სადაც W არის ასოცირებული წონითი m განზომილებიანი ვექტორი, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $w_j \in (0,1), \ (j = 1,2,...m); \ \sum_{j=1}^{m} w_j = 1$ და ზოგიერთი შესაძლო ზომა $Pos : 2^S \Rightarrow [0,1]$, რითაც მიიღება შემდეგი ფორმულა:

$$
\begin{aligned}
& AsFPOWA(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_m) = \beta \cdot \sum_{j=1}^{m} w_j \widetilde{b}_j + \\
& + (1-\beta) M\left(E_{P_{\sigma_1}}(\widetilde{a}), E_{P_{\sigma_2}}(\widetilde{a}), ..., E_{P_{\sigma_k}}(\widetilde{a})\right)
\end{aligned}
\qquad (2.3.7.1)
$$

სადაც $\widetilde{b}_j$ არის j-ური უდიდესი ელემენტი ერთობლიობაში $\{\widetilde{a}_i\}, i = 1,...,m$; $E_{P_{\sigma_i}}(\widetilde{a})$ არის $\widetilde{a}$-ს მათემატიკური მოლოდინი, რომლის მიმართებაც ასოცირდება ალბათობათა P_{σ_i} კლასთან.

ჩვენ განვიხილავთ AsPOWA ოპერატორებს კონკრეტული ფუნქციებისთვის სხვადასხვა M -თვის:

AsFPOWAmin, თუ M=Min;

AsFPOWAmax, თუ M=Max;

AsFPOWAmean, თუ M=Mean.

§2.4. განუზღველ გარემოში გადაწყვეტილების მიღების ერთი მიდგომა დაფუძნებული დემპსტერ–შეიფერის თეორიისა და აგრეგირების ოპერატორების გამოყენებაზე.

2.4.1. შესავალი

კონკრეტული ამოცანის ფორმულირებამდე მოკლედ შევეხოთ რამდენიმე ძირითად ცნებას ინტერვალური რიცხვების, კონკრეტული UIOWA და UIHA ოპერატორების და Dempster-Shafer (D-S)–ის თეორიის შესახებ.

ინტერვალური რიცხვი არის საკმაოდ ხელსაყრელი და მარტივი ტექნიკა განუზღვრელობის წარმოსადგენად. ლიტერატურაში ჩვენ ვპოულობთ ინტერვალური რიცხვების სხვადასხვა ტიპს. მაგალითად, თუ ჩვენ ვღებულობთ ოთხეულის კორტეჟს 4–tuple (a_1, a_2, a_3, a_4) ე.წ. კვადრუპლეტი (quadruplet), ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ეს, როგორც a_1 და a_4 წარმოადგენენ ინტერვალური რიცხვის მინიმუმს და მაქსიმუმს, და a_2 და a_3, ინტერვალს უმაღლესი ალბათობით და შესაძლებლობით, დამოკიდებული გამოყენებაზე, რაც გვინდა, რომ მივანიჭოთ ინტერვალურ რიცხვს. შევნიშნოთ, რომ $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$. თუ , $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ მაშინ ინტერვალური რიცხვი არის ზუსტი რიცხვი და თუ $a_2 = a_3$, მაშინ ეს არის 3–tuple ე.წ. ტრიპლეტი. ორ A და B ტრიპლეტზე განმარტებულია შემდეგი ოპერაციები:

$$A + B = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$A - B = (a_1 - b_3,\ a_2 - b_2, a_3 - b_1)$$

$A \times k = (k \times a_1,\ k \times a_2, k \times a_3)$, სადაც $k > 0$.

The uncertain induced OWA (UIOWA) ოპერატორი შემუშავებული იქნა Xu–ს მიერ (2006). იგი წარმოადგენს OWA ოპერატორის განზოგადოებას (Beliakov et al. 2007; Merigo 2007; Yager, 1988; 1993), რომელიც იყენებს უმნიშვნელოვანეს თვისებებს ორი ყველაზე ცნობილი აგრეგირების ოპერატორებისა. ესენია: the induced OWA (Yager და Filev, 1999) the uncertain OWA (Xu და Da, 2003) ოპერატორები. იგი იყენებს ინტერვალურ რიცხვებს განუზღვრელი ინფორმაციის წარმოსადგენად და პროცესის მოსაწესრიგებლად (დასალაგებლად), რაც ეფუძნება დამაჯერებლობის ცვლადების დალაგებადობას. ეს უკანასკნელი შეიძლება შემდეგნაირად განისაზღვროს:

განმარტება 2.4.1.1. დავუშვათ Ω არის ინტერვალური რიცხვების სიმრავლე. UIOWA ოპერატორი n განზომილებიან სივრცეზე არის ასახვა $UIOWA:\Omega^n \to \Omega$, რომელსაც გააჩნია ასოცირებული წონითი ვექტორი W n განზომილებიან სივრცეზე ისეთი, რომ $w_j \in [0,1]$ და $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, მაშინ

$$UIOWA(\langle u_1, \widetilde{a}_1 \rangle, ..., \langle u_n, \widetilde{a}_n \rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (2.4.1.1)$$

სადაც b_j არის UIOWA-ს $\langle u_i, \widetilde{a}_i \rangle$ წყვილის $\widetilde{a}_i$ სიდიდე, რომელსაც გააჩნია j-ური უდიდესი u_i, ხოლო u_i არის მოწესრიგებული დამაჯერებლობის ცვლადი და $\widetilde{a}_i$ არიან ინტერვალური რიცხვები.

განუზღვრელი დამაჯერებლობის ჰიბრიდული გასაშუალოების ოპერატორი (The uncertain induced hybrid averaging operator) წარმოადგენს ჰიბრიდული საშუალოს (hybrid averaging) (Xu, 2006; Xu და Da, 2003) განზოგადოებას, რომელიც იყენებს წონით საშუალოს (weighted average - WA) და OWA ოპერატორს ერთდროულად. ის ასევე იყენებს ინტერვალურ რიცხვებს განუზღვრელი ინფორმაციის წარმოსადგენად და პროცესის მოსაწესრიგებლად (დასალაგებლად), რაც ეფუძნება დამაჯერებლობის ცვლადების დალაგებადობას. იგი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

განმარტება 2.4.1.2. დავუშვათ Ω არის ინტერვალური რიცხვების სიმრავლე. UIHA ოპერატორი n განზომილებიან სივრცეზე არის ასახვა $UIHA:\Omega^n \to \Omega$, რომელსაც გააჩნია ასოცირებული წონითი ვექტორი W n განზომილებიან სივრცეზე ისეთი, რომ $w_j \in [0,1]$ და $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, მაშინ

$$UIHA(\langle u_1, \widetilde{a}_1 \rangle, ..., \langle u_n, \widetilde{a}_n \rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (2.4.1.2)$$

სადაც b_j არის UIHA-ს $\langle u_i, \widetilde{a}_i \rangle$ წყვილის $\widetilde{a}_i$ ($\widetilde{a} = n\omega_i \widetilde{a}_i$, $i = 1,2,...,n$) სიდიდე, რომელსაც გააჩნია j-ური უდიდესი u_i, ხოლო u_i არის მოწესრიგებული დამაჯერებლობის ცვლადი, $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_3)^T$ არის $\widetilde{a}_i$-ის წონითი ვექტორი ($\omega_i \in [0,1]$ და წონების ჯამი 1–ის ტოლია) და $\widetilde{a}_i$ არიან ინტერვალური რიცხვები.

დემპსტერ–შეიფერის მტკიცებათა თეორია (Dempster, 1967; Shafer, 1976) უზრუნველყოფს სტრუქტურის გაერთიანებას განუზღვრელობის წარმოსადგენად

რამდენადაც, მას შეუძლია ჩართოს რისკების შემთხვევები და არ ცოდნა, როგორც განსაკუთრებული შემთხვევა.

განმარტება 2.4.1.3. დემპსტერ–შეიფერის დასაჯერობის სტრუქტურა (D-S belief structure) განსაზღვრული X სივრცეზე, შედგება X –ის n არაცარიელი ქვესიმრავლეების კოლექციისგან, B_j ნებისმიერი $j = 1,2,..,n$ –თვის იწოდება **ფოკალურ ელემენტად** და ასახვა m – **ძირითადი ალბათური განაწილება (basic probability assignment) განსაზღვრული როგორც:** $m: 2^X \to [0,1]$ ისე, რომ :

1) $m(B_j) \in [0,1]$;

2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$;

3) $m(A) = 0,\ \forall A \neq B_j$.

2.4.2. UIOWA და UIHA ოპერატორები გადაწყვეტილების მიღების პროცესში D-S თეორიის გამოყენებით.

გადაწყვეტილებები მიღების ახალი მიდგომა D-S თეორიის მიხედვით შესაძლებელია განუზღვრელი დამაჯერებლობის აგრეგირების ოპერატორის გამოყენებით. მთავარი უპირატესობა ამ ტიპის აგრეგირების ოპერატორის გამოყენებისა განუზღვრელი ინფორმაციის გადაწყვეტის და აგრეგირების ოპერატორების გამოყენების (ისინი წარმოადგენენ აგრეგირების ოპერატორების პარამეტრიზებულ ოჯახს მინიმუმსა და მაქსიმუმს შორის) და დამაჯერებლობის ცვლადების გამოყენებით არგუმენტების გადალაგებისას ზოგადი ფორმულირების გამოყენების შესაძლებლობაშია. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ამოცანაში ჩვენ ყურადღებას ვამახვილებთ UIOWA და UIHA ოპერატორებზე, მაგრამ შესაძლებელია განვიხილოთ სხვა ტიპები განუზღვრელი დამაჯერებლობის აგრეგირების ოპერატორებისა.

მოტივაცია ინტერვალური რიცხვების გამოყენებისთვის ჩნდება, რადგან ზოგჯერ ინფორმაცია მიუწვდომელია, ცხადი არ არის და აუცილებელია შევაფასოთ იგი სხვა მიდგომებით, როგორიცაა ინტერვალური რიცხვების გამოყენება. ასევე ინფორმაცია განუზღვრელია და რთულია მისი საშუალებით გადაწყვეტილების მიღება, სულ მცირე

ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთთ საუკეთესო და უარესი სცენარები. გადაწყვეტილების მიღების პროცესი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

დავუშვათ ჩვენ გვაქვს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა, რომელშიც ჩვენ გვაქვს ალტერნატივების კოლექცია $\{A_1, A_2, ..., A_q\}$ ბუნებრივი მდომარეობებით $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$. $\widetilde{a}_{ih}$ არის განუზღვრელობის ღირებულება, მოცემული ინტერვალური რიცხვების ფორმით, გადაწყვეტილების მიმღები პირისთვის (DMP) თუ ის ირჩევს A_i ალტერნატივას და S_h ბუნებრივ მდგომარეობას. ბუნებრივი მდგომარეობის შესახებ ცოდნა წარმოდგენილია დასაჯერობის სტრუქტურის ტერმინებში m ფოკალური ელემენტებით $B_1, B_2, .., B_r$ და ასოცირებულია თითოეული ფოკალური ელემენტისთვის წონა $m(B_k)$.

პრობლემის მიზანი მდგომარეობს იმაში, რომ შევარჩიოთ ალტერნატივა, რომელიც საუკეთესო შედეგს აძლევს გადაწყვეტილების მიმღებ პირს. ამისათვის საჭიროა შესრულდეს შემდეგი ბიჯები:

ბიჯი 1: გამოვთვალოთ განუზღვრელი ღირებულებათა მატრიცა.

ბიჯი 2: გამოვთვალოთ დასაჯეროზის ფუნქცია m ბუნებრივი მდგომარეობების შესახებ.

ბიჯი 3: გამოვთვალოთ წონები კოლექცია w, რომლებიც გამოიყენება UIOWA აგრეგირებისას თითოეული სხვადასხვა კარდინალობის ფოკალური ელემენტისთვის. უნდა ავღნიშნოთ, რომ შესაძლებელია სხვადასხვა მეთოდების გამოყენება, რომლებიც ეყრდნობა გადაწყვეტილების მიმღები პირების ინტერესებს (Merigo, 2007; Yager, 1988; 1993; 2007; Yager და Filev, 1994).

ბიჯი 4: განვსაზღვროთ განუზღვრელი ღირებულებათა კოლექცია M_{ik}, თუ ჩვენ ვირჩევთ A_i ალტერნატივას და B_k ფოკალურ ელემენტს ნებისმიერი i და k სიდიდეებისთვის. მაშასადამე, $M_{ik} = \{a_{ih} \mid S_h \in B_k\}$.

ბიჯი 5: გამოვთვალოთ განუზღვრელი აგრეგირებული ღირებულება $V_{ik} = UIOWA(M_{ik})$ ფორმულა (2.4.1.1)–ის გამოყენებით ნებისმიერი i და k სიდიდეებისთვის.

ბიჯი 6: თითოეული ალტერნატივისთვის გამოვთვალოთ განზოგადოებული მოსალოდნელი სიდიდე C_i, სადაც:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{2.4.1.3}$$

ბიჯი 7: ამოვარჩიოთ ალტერნატივა უდიდესი C_i –ით როგორც ოპტიმალური.

ზოგიერთ სიტუაციაში, გადაწყვეტილების მიმღები პირს შეუძლია უპირატესობა მიანიჭოს სხვა განუზღვრელი აგრეგირების ოპერატორის გამოყენებას როგორიცაა UIHA ოპერატორი. ამ ოპერატორის მთავარი უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ ის იყენებს UWA–ს და UIOWA–ს მახასიათებლებს იმავე აგრეგირებისას. თუ ჩვენ წარმოვადგენთ ამ ოპერატორს გადაწყვეტილების მიღებისას D-S თეორიასთან ერთად, ჩვენ ვართ უზრუნველყოფთ სტრუქტურის გაერთიანებას, რომელიც მოიცავს იმავე მოსალოდნელობის ფორმულირებას.

აგრეგირების აღნიშნული ტიპის გამოსაყებლად D-S სტრუქტურაში, ჩვენ ვთვლით, რომ ახლა უკვე ბიჯი 3–ში, როდესაც ხდება წონების დათვლა, რომლებიც გამოიყენება აგრეგირებისას, ჩვენ ვიყენებთ ორ წონით ვექტორს, რადგან ჩვენ ვრთავთ UWA და UIOWA ოპერატორებს იმავე საკითხში. ბიჯი 5–ში, როდესაც ხდება განუზღვრელი აგრეგირებული ღირებულებების გამოთვლა, ჩვენ ვიყენებთ UIHA ოპერატორს UIOWA ოპერატორის ნაცვლად ფორმულა (2.4.1.2)–ის გამოყენებით.

ჩვენ შეგვიძლია განვავითაროთ UIOWA და UIHA ოპერატორების სხვადასხვა ოჯახი. მაგალითად, შესაძლებელია მივიღოთ UA და UWA. UA–ს ვღებულობთ UIOWA–სგან, როცა $w_j = \frac{1}{n}$, $\forall \tilde{a}_i$ –თვის და UWA, თუ $u_i > u_{i+1}$, $\forall a_i$ –თვის. UIOWA მიიღება, როცა u_i სიდიდეების დალაგებული პოზიცია იგივეა რაც j. შევნიშნოთ, რომ შეგვეძლია გამოვიყენოთ სხვა ოჯახები, რომლებიც განხილულია Merigo-ს და Yager–ის მიერ (Merigo, 2007, Yager, 1993).

2.4.3. საილუსტრაციო მაგალითი.

მიმდინარე მაგალითში ჩვენ გვსურს ავამუშავოთ ახალი მიდგომა, რომელიც ეხება გადაწყვეტილების მიღებას ფინანსური სტრატეგიის არჩევისას. ჩვენ გამოვიყენებით შემდეგ აგრეგირების ოპერატორებს: UA, UWA, UOWA, UIOWA და UIHA.

დავუშვათ კომპანია გეგმავს მომავალი წლისათვის თავის ფინანსურ სტრატეგიას და ისინი განიხილავენ 4 შესაძლო ფინანსურ სტატეგიას. ესენია:

$A_1 =$ ფინანსური სტრატეგია 1;

$A_2 =$ ფინანსური სტრატეგია 2;

$A_3 =$ ფინანსური სტრატეგია 3;

$A_4 =$ ფინანსური სტრატეგია 4;

ზემოთ ჩამოთვლილი ფინანსური სტრატეგიების შესაფასებლად კომპანია მიმართავს ექსპერტების ჯგუფს. ისინი ფიქრობენ, რომ გასაღები ფაქტორია – კომპანიის ეკონომიკური სიტუაცია მომდევნო ერთი წლის განმავლობაში. გულითადი ანალიზის შემდეგ ექსპერტებმა განიხილეს ხუთი შესაძლო სიტუაცია, რომელიც შეიძლება განვითარდეს მომავალში. ესენია:

$S_1 =$ ძალიან ცუდი;

$S_2 =$ ცუდი;

$S_3 =$ ნორმალური;

$S_4 =$ კარგი;

$S_5 =$ ძალიან კარგი;

შემდეგ, განუზღვრელი სიტუაციების გათვალისწინებით, რომელიც შეიზლება მოხდეს, ექსპერტები ადგენენ განუზღვრელი ღირებულებათა მატრიცას. რადგან კომპანიის სამომავლო მდგომარეობის და მოგების შესახებ ინფორმაცია საკმაოდ არაზუსტია, ექსპერტები იყენებენ ინტერვალურ რიცხვებს. შედეგი წარმოდგენილი ცხრილი 2.4.3.1–ში.

ცხრილი 2.4.3.1. განუზღვრელი ღირებულებათა მატრიცა.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(10, 20, 30)	(40, 50, 60)	(70, 80, 90)	(40, 50, 60)	(50, 60, 70)
A_2	(50, 60, 70)	(30, 40, 50)	(20, 30, 40)	(60, 70, 80)	(40, 50, 60)
A_3	(70, 80, 90)	(40, 50, 60)	(30, 40, 50)	(30, 40, 50)	(40, 50, 60)
A_4	(30, 40, 50)	(50, 60, 70)	(20, 30, 40)	(50, 60, 70)	(60, 70, 80)

ინფორმაციის დეტალური ანალიზის შემდეგ, ექსპერტებმა მიიღეს ზოგიერთი მოსალოდნელი ინფორმაცია ბუნებრივი მდგომარეობების შესახებ, რომლებიც განვითარდება მომავალში. ეს ინფორმაცია წარმოდგენილია შემდეგი დასაჯერობის სტრუქტურით ბუნებრივი მდგომარეობების შესახებ:

$B_1 = \{S_2, S_3, S_4\} = 0.3$;

$B_2 = \{S_1, S_2, S_5\} = 0.3$;

$B_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} = 0.4$;

კომპანიის შემაჯამებელი ხასიათი ძალიან რთულია, რადგან ის მოიცავს დირექტორთა საბჭოს სხვადასხვა წევრების მოსაზრებებს. ამიტომ ექსპერტები იყენებენ დალაგებულ დასაჯერობის ცვლადებს ორგანიზაციის ზოგადი ხასიათის შესაფასებლად (ანალიზისათვის). შედეგები ნაჩვენებია ცხრილი 2.4.3.2–ში.

ცხრილი 2.4.3.2. დალაგებული დასაჯერების ცვლადები.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	30	22	16	35	26
A_2	12	18	24	20	30
A_3	16	11	21	33	25
A_4	30	26	12	18	24

ექსპერტები იძლევიან შემდეგ წონით ვექტორებს UWA და UIOWA ოპერატორებისთვის:

$W_3 = (0.3, 0.3, 0.4);$

$W_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3);$

$W_5 = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3);$

ამ ინფორმაციის ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ აგრეგირებული ღირებულებები, რომელიც ნაჩვენებია ცხრილი 2.4.3.3–ში.

ცხრილი 2.4.3.3. განუზღვრელი აგრეგირებული ღირებულებები.

	UA	*UWA*	*UOWA*	*UIOWA*	*UIHA*
V_{11}	(50, 60, 70)	(49, 59, 69)	(49, 59, 69)	(52, 62, 72)	(52, 62, 72)
V_{12}	(33.3, 43.3, 53.3)	(35, 45, 55)	(31, 41, 51)	(34, 44, 54)	(40, 50, 60)
V_{13}	(40, 50, 60)	(43, 53, 63)	(37, 47, 57)	(37, 47, 57)	(42, 51, 60)
V_{21}	(36.6, 46.6, 56.6)	(39, 49, 59)	(35, 45, 55)	(36, 46, 56)	(36, 46, 56)
V_{22}	(40, 50, 60)	(40, 50, 60)	(39, 49, 59)	(41, 51, 61)	(37, 46.5, 56)
V_{23}	(40, 50, 60)	(40, 50, 60)	(37, 47, 57)	(37, 47, 57)	(32.5, 41, 49.5)
V_{31}	(33.3, 43.3, 53.3)	(33, 43, 53)	(33, 43, 53)	(34, 44, 54)	(34, 44, 54)
V_{32}	(50, 60, 70)	(49, 59, 69)	(49, 59, 69)	(49, 59, 69)	(44.5, 54.5, 64.5)
V_{33}	(42.5, 52.5, 62.5)	(40, 50, 60)	(40, 50, 60)	(40, 50, 60)	(34.5, 43, 51.5)
V_{41}	(40, 50, 60)	(41, 51, 61)	(38, 48, 58)	(38, 48, 58)	(38, 48, 58)
V_{42}	(46.6, 56.6, 66.6)	(48, 58, 68)	(45, 55, 65)	(48, 58, 68)	(55.5, 66, 76.5)
V_{43}	(37.5, 47.5, 57.5)	(37, 47, 57)	(35, 45, 55)	(35, 45, 55)	(34, 43, 52)

როგორც კი მივიღეთ აგრეგირების შედეგები, ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ განუზღვრელი განზოგადოებული მათემატიკური მოლოდინი. შედეგები ნაჩვენებია ცხრილი 2.4.3.4–ში.

ცხრილი 2.4.3.4. განუზღვრელი განზოგადოებული მათემატიკური მოლოდინი.

	UA	*UWA*	*UOWA*	*UIOWA*	*UIHA*
A_1	(41, 51, 61)	(42.4, 52.4, 62.4)	(38.8, 48.8, 58.8)	(40.6, 50.6, 60.6)	(44.4, 54, 63.6)
A_2	(39, 49, 59)	(39.7, 49.7, 59.7)	(37, 47, 57)	(37.9, 47.9, 57.9)	(34.9, 44.15, 53.4)
A_3	(42, 52, 62)	(40.6, 50.6, 60.6)	(40.6, 50.6, 60.6)	(40.9, 50.9, 60.9)	(37.35, 46.75, 56.15)
A_4	(41, 51, 61)	(41.5, 51.5, 61.5)	(38.9, 48.9, 58.9)	(39.8, 49.8, 59.8)	(41.65, 51.4, 61.15)

როგორც ჩვენ ვხედავთ, განუზღვრელი აგრეგირების ოპერატორის გამოყენებაზე დაყრდნობით, შედეგები და გადაწყვეტილებები შეიძლება იყოს განსხვავებული.

UA , UOWA და UIOWA ოპერატორებისთვის ოპტიმალური არჩევანია A_3 , ხოლო UWA და UIHA ოპერატორებისთვის საუკეთესო შედეგია A_1 .

თავი III. კვლევის მოსალოდნელი შედეგები.

განზოგადდება აგრეგირების OWA-ს ტიპის ოპერატორები კომბინირებულ განუზღვრელ გარემოში (ობიექტური + სტოქასტური + ფაზი). შეისწავლება აგებული ოპერატორების ინფორმაციული ზომები (ORNESS, BALANS, DEV, ENT). მოხდება შედეგების წარდგენა, როგორც ადგილობრივ, ასევე საერთაშორისო კონფერენციებზე. შეიქმნება ერთი ან ორი კვლევითი სტატია საერთაშორისო მნიშვნელობის ჟურნალში გადასაცემად. ინტელექტუალური სისტემის, როგორც პროგრამული პროდუქტის შექმნის სარგებლიანობის თვალსაზრისით მოეწყობა შეხვედრები სტრატეგიულ მენეჯმენტში დაინტერესებულ იურიდიულ პირებთან (ბანკები, სახელმწიფო ორგანიზაციები - სამინისტროები და ა.შ.).

დასკვნა

მიმდინარე კვლევა ძირითადად წარმოადგენს გადაწყვეტილების მიღების აგრეგირების ოპერატორების ზოგად თეორიულ მიმოხილვას. ასევე OWA-ს ტიპის აგრეგირების ოპერატორების შესწავლას და მათ გამოყენებითობას გადაწყვეტილების მიღების სისტემებში, როდესაც ინფორმაცია განუზღვრელია.

ნაშრომში ასევე წარმოდგენილია გადაწყვეტილების მიღების საკითხი ფაზი განუზღვრელ გარემოში. საილუსტრაციოდ წარმოდგენილია საინტერესო გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა, რომელიც დაფუძნებულია დემპსტერ-შეიფერის სტრუქტურისა და UIOWA და UIHA ოპერატორების გამოყენებაზე.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1]. Aczel, J., Lectures on Functional Equations and Applications, Academic Press : New York, 1966.

[2]. Aczel, J., On Mean Values, Bulletin of the American Mathematical Society 54, 392-400, 1948.

[3]. Beliakov G., Pradera A. and Calvo T., Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[4]. Calvo T. and Mesiar R., Generalized medians. Proceedings of AGGREGATION'99, Palma de Mayorca, 159-165, 1999.

[5]. Dombi, J., Basic concepts for the theory of evaluation : The aggregative operator, European Journal of Operational Research 10, 282-293, 1982.

[6]. Dubois D. and Prade H., Possibility Theory, New York: Plenum Press, 1988.

[7]. Dubois, D. and Prade, H., Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory, *The Reliability of Expert Systems,* Hollnagel, E. (ed.), Ellis Horwood Limited : Chichester, 64-118, 1986.

[8]. Dujmovic, J. J., Evaluation, Comparison and Optimization of hybrid computers using the theory of complex criteria, *Simulation of Systems*, Dekker, L. (Eds.), North Holland : Amsterdam, 553-566, 1976.

[9]. Dyckhoff, H. and Pedrycz, W., Generalized means as model of compensative connectivities*, Fuzzy Sets and Systems 14*, 143-154, 1984.

[10]. Engemann K.J., Filev D.P. and Yager R.R., Modelling decision making using immediate probabilities. International Journal of General Systems, 24:281-294, 1996.

[11]. Fagin, R. and Wimmers, E., A formula for incorporating weights into scoring rules, *Theoretical Computer 239,* 309-338, 2000.

[12]. Fodor, J. and Roubens, M., Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support, Kluwer Academic Publisher : Dordrecht, 1994.

[13]. Grabisch, M., Nguyen, H.T. and Walker, E.A., Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference, *Kluwer Academics Publishers* : Dordrecht, 1995.

[14]. Kolmogorov, A., Sur la notion de moyenne*, Atti delle Reale Accademia Nazionale dei Lincei Mem. Cl. Sci. Mat. Natur. Sez. 12*, 323-343, 1930.

[15]. Luce, R.D. and Krantz, D.H., Suppes, P., and Tversky, A., Foundations on measurements, *Academic Press,* New York, 1990.

[16]. Mayor, G. and Trillas E., On the representation of some Aggregation functions, *Proceeding of ISMVL*, 111-114, 1986.

[17]. Merigó J. M., Montserrat L., Ramón C., Induced aggregation operators in decision making with the Dempster-Shafer belief structure.

[18]. Merigo J.M., New extensions to the OWA operators and its application in decision making (In Spanish). PhD Thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona, 2008.

[19]. Merigo J.M., Using immediate probabilities in fuzzy decision making. In: Proceedings of the 22nd ASEPELT Conference, Barcelona, pp . 1650-1664, 2008.

[20]. Mesiar R. and Komorníková M., Aggregation Operators, *Proceeding of the XI Conference on applied Mathematics PRIM' 96,* Herceg D., Surla K. (eds.), Institute of Mathematics, Novi Sad, 193-211, 1997.

[21]. O'Hagan, M., Aggregating template or rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy set logic, *Proceedings of the 22nd Annual IEEE Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers,* Pacific Grove, Ca., 681-689, 1988.

[22]. Ovchinnikov, S., On Robust Aggregation Procedures, *Aggregation Operators for Fusion under Fuzziness.* Bouchon-Meunier B. (eds.), 3-10, 1998.

[23]. Silvert, W., Symmetric summation: a class of operations on fuzzy sets, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 9,* 659-667, 1979.

[24]. Sirbiladze G., Extremal Fuzzy Dynamic Systems: Theory and Applications. IFSR International Series on Systems Science and Engineering, 28, 1st Edtition, Springer, 2012.

[25]. Sirbiladze G., Badagadze O., Sirbiladze K. and Tsulaia G., OWA – Type Possibilistic Aggregations in the Problem of the Country Political Management, Transactions of the International Scientific Conference Dedicated to the 90-th Anniversary of Georgian Technical University, 316-321, Tbilisi, Georgia, September, 2012.

[26]. Torra V. and Narukawa Y., Modeling Decisions: Information Fusion and Aggregation Operators. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[27]. Torra V., The weighted OWA operator. International Journal of Intelligent Systems, 12:153-166, 1997.

[28]. Xu Z.S. and Da Q.L., An overview of operators for aggregating information. International Journal of Intelligent Systems, 18:953-968, 2003.

[29]. Yager R.R. and Filev D.P., Induced ordered weighted averaging operators. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B, 29:141-150, 1999.

[30]. Yager R.R., Including decision attitude in probabilistic decision making. International Journal of Approximate Reasoning, 21:1-21, 1999.

[31]. Yager R.R., “Families of OWA operators”, Fuzzy Sets an Systems, Vol. 59, 1993, pp 125-148.

[32]. Yager R.R., “Quantifier Guided Aggregation Using OWA Operators”, International Journal of Intelligent Systems, Vol. 11, 1996, pp. 49-73.

[33]. Yager R.R., Decision making under Dempster-Shafer uncertainties. International Journal of General Systems, 20:233-245, 1992.

[34]. Yager R.R., Families of OWA operators. Fuzzy Sets and Systems, 59:125-148, 1993.

[35]. Yager R.R., Generalized OWA aggregation operators, Journal of Fuzzy Optimization and Decision Making 3 (1) (2004) 93–107.

[36]. Yager R.R. and Kacprzyk J. (Eds.), *The Ordered Weighted Averaging Operators, Theory and Applications*, Kluwer Academic Publisher: Boston, Dordrecht, London, 1997.

[37]. Yager R.R. and Rybalov, A., Full reinforcement operators in aggregation techniques, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 28,* 757-769, 1998.

[38]. Yager R.R., A new methodology for ordinal multiple aspect decisions based on fuzzy sets, *Decision Sciences 12,* 589-600, 1981.

[39]. Yager R.R., On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE transactions on Systems, Man and Cybernetics 18*, 183-190, 1988.

[40]. Zadeh, L. A., Fuzzy Logic = Computing with Words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 59, 125-148, 1993.