ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა

შემთხვევითი ხეტიალი

მაგისტრატურა

(2014)

ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტი

მათემატიკის მიმართულება

ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ქვემიმართულება

შემთხვევითი ხეტიალი

მაია ფოჩხუა

(სამაგისტრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი:

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი.

თ.ს.უ-ს ასოცირებული პროფესორი

ომარ ღლონტი

თბილისი

2014

სარჩევი .

შინაარსი .

ტერმინი „შემთხვევითი ხეტიალი“ (Random Walk) პირველად შემოიღო **კარლ პირსონმა** 1905 წელს (იხ. [1] Pearson K .(1905) . The problem of Random walk. Wataze . 72,294 (იყო ინგლისელი მეცნიერი . მოღვაწეობდა 1857-1936 წლებში , კემბრიჯის და ჰაიდელბერგის უნივერსიტეტებში).

შემთხვევითი ხეტიალი გამოიყენება შემდეგ დარგებში : ეკოლოგია , ეკონომიკა , ფსიქოლოგია , კომპიუტერული მეცნიერებები , ფიზიკა , ქიმია , ბიოლოგია და მათემატიკა.

შემთხვევითი ხეტიალი ნათელს ჰფენს პროცესს , რომელიც ამ სფეროებში მიიღება დაკვირვებების შედეგად და ცხადად ხსნის დაკვირვებული პროცესების ყოფაქცევას ამ სფეროებიდან და ამიტომ , ის წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური მოდელების საფუძველს. ზუსტ ტერმინოლოგიას რომ მივსდიოთ, ის წარმოადგენს შემთხვევით პროცესის მაგალითს დისკრეტული დროის შემთხვევაში . ხშირად შემთხვევითი ხეტიალი დაკავშირებულია **მარკოვის** პროცესთან (მოღვაეობდა 1856-1922 წლებში). ის არის ტრაექტორიების მათემატიკური მოდელირება , რომლებიც დაკავშირებულია თანმიმდევრულ ნაბიჯებთან . მაგალითად : ტრაექტორია შეიძლება დახაზოს მოლეკულის მოძრაობამ გაზში ან სითხეში , ცვალებადმა ფასებმა . ასევე მოთამაშის ფინანსური სტატუსი შესაძლებელია მოდელირებული იყოს შემთხვევითი ხეტიალით.

თუმცა სხვა უფრო რთული და საინტერესო შემთხვევითი ხეტიალები დაკავშირებულია გრაფებთან და ჯგუფებთან და ასევე , ის მიმართებაშია დროის პარამეტრთან და აქედან გამომდინარე , ხშირად ხეტიალი არის დისკრეტულ დროში და ინდექსირებულია ნატურალური რიცხვებით $X_1, X_2, X_3, \dots$. თუმცა ზოგიეთი შემთხვევითი ხეტიალი განიხილება X_t უწყვეტი დროის განმავლობაში $t \geq 0$.

ზღვრული პროცესის შედეგად შემთხვევითი ხეტიალი გადადის **ბროუნის** მოძრაობაში (რობერტ ბროუნი : შოტლანდიელი მეცნიერი . მოღვაწობდა 1773-1858 წლებში) . მისი საშუალებით შესაძლებელია ბროუნის მოძრაობის – მნიშვნელოვანი შემთხვევითი პროცესის უწყვეტი დროის შემთხვევაში აგება . ზოგჯერ **ვინერის** პროცესს უწოდებენ **ბროუნის** მოძრაობას . აქედან გამომდინარე , **ვინერის** პროცესი არის შემთხვევითი ხეტიალის ზღვრული პროცესი (ნობერტ ვინერი : ამერიკელი მეცნიერი . მოღვაწეობდა 1894-1964 წლებში) .

შემთხვევით ხეტიალს ასევე ბევრი საინტერესო თვისება გააჩნია და სწორედ ამ თავში საუბარი იქნება ამ თვისებების შესახებ და ის განხილული იქნება სხვა და სხვა ასპექტებში .

შემთხვევითი ხეტიალი.

§ 1 . გაკოტრების ალბათობა და მონეტის აგდების საშუალო ხანგრძლივობა .

1 .

ახლა და შემდეგ განხილული იქნება რიგი კანონზომიერება , რომლებსაც ხანდახან შეიძლება ჰქონდეს მკვეთრად მოულოდნელი ხასიათი. ყველა განხილვა ჩატარებული იქნება ბერნულის სქემისთვის , მაგრამ დასკვნები რჩება სამართლიანი ზოგადი სახის შემთხვევითი ხეტიალისთვისაც.

2.

განვიხილოთ ბერნულის სქემა (Ω, A, P) -ზე , სადაც

$\Omega = \{\omega : \omega = (x_1, \dots, x_n),\ x_i = \pm 1\}$, A სისტემა არის Ω სივრცის ქვესიმრავლე და $p(\omega) = p^{v(\omega)} q^{n-v(\omega)}$, $p(\omega) = \frac{\sum x_i + n}{2}$. ვთქვათ $\xi_i(\omega) = x_i\,, i = 1, \dots, n$. როგორც ცნობილია , $\xi_1, \dots, \xi_n$ მიმდევრობა წარმოადგენს დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობას. v არის არის წარმატება , თუ რამდენჯერ გამოვიდა +1 . წარმატებათა რაოდენობა n ჩატარებულ ცდაში არის შემთხვევითი სიდიდე .

$P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = -1) = q$, $p + q = 1$.

დავუშვათ $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $1 \le k \le n$. S_0 , $S_1, \dots, S_n$ მიმდევრობა შეიძლება განვიხილოთ , როგორც ზოგიერთი ნაწილაკის შემთხვევითი ხეტიალის ტრაექტორია , ნულიდან გამომდინარე . ამ შემთხვევაში $S_{k+1} = S_k + \xi_k$. ე.ი თუ k მომენტში ნაწილაკი იმყოფება S_k წერტილში , მაშინ $k+1$ მომენტისთვის ის იწევს ერთი ერთეულით (ალბათობით p) ზევით ან ერთი ერთეულით (ალბათობით q) ქვემოთ .

ვთქვათ A და B ორი მთელი რიცხვია , $A \le 0 \le B$. ერთ-ერთი საინტერესო ამოცანა , რომელიც დაკავშირებულია შემთხვევით ხეტიალთან , იმ საკითხის გამოკვლევაშია , თუ როგორი ალბათობით გამოვა n ბიჯის განმავლობაში (A, B) ინტერვალიდან მოხეტიალე ნაწილაკი . ასევე საინტერესოა კითხვა იმის შესახებ , თუ რა ალბათობით იგი მოხვდება (A, B) ინტერვალიდან , წერთილ A-ში თუ B-ში.

ამ საკითხების ბუნებრივობა გასაგები ხდება , თუ ვისარგებლებთ შემდეგი სათამაშო ინტერპრეტაციით . დავუშვათ გვყავს ორი მოთამაშე (პირველი და მეორე) , რომლების საწყისი კაპიტალი შესაბამისად ტოლია $(-A)$ და B-სი . თუ $\xi_i = +1$, მაშინ ჩავთვალოთ , რომ მეორე მოთამაშე უხდის გარკვეულ თანხას პირველს , თუ $\xi_i = -1$, პირიქით

პირველი უხდის მეორეს . ამ აზრით $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$ შეიძლება წარმოვადგინოთ მოგების სიდიდე , პირველი მოთამაშისა მეორიდან . (თუ $S_k < 0$, მართლაც , ამ მოთამაშემ წააგო გარკვეული სიდიდით მეორე მოთამაშესთან) . ეს არის , სწორედ , წაგების სიდიდე k „სვლის" განმავლობაში .

$k \le n$ მომენტში , როცა პირველად $S_k = B$ ($S_k = A$) მეორე (პირველი) მოთამაშის კაპიტალი ხდება ნულის ტოლი , სხვანაირად რომ ვთქვათ , მაშინ მიმდინარეობს მისი გაკოტრება . (თუ $k < n$, შეიძლება ჩავთვალოთ , რომ თამაში წყდება k მომენტში , მაგრამ თვითონ ხეტიალი რჩება განსაზღვრული n მომენტის ჩათვლით) .

სანამ ამოცანის ზუსტ დასმამდე გადავალთ , შემოვიტანოთ აღნიშვნათა მწკრივი .

ვთქვათ x არის მთელი რიცხვი მთელი რიცხვი $[A, B]$ ინტერვალიდან და $0 \le k \le n$ - თვის ვთქვათ $S_k^x = x + S_k$, $\tau_k^x = min\{0 \le l \le k : \ S_l^x = A \ an \ B\}$ (1) , სადაც ვიგულისხმებთ $\tau_k^x = k$, თუ $A \le S_l^x \le B$ ყველა $0 \le l \le k$ –თვის ვთქვათ

$S_k^x = x + S_k$

$\tau_k^x = min\{0 \le l \le k : S_k^l = A \ \ an \ \ B\}$ (1) ,

საიდანაც ვიგულისხმებთ $\tau_k^x = k$, თუ $A < S_k^l < B$ ყველა $0 \le l \le k$-თვის.

ყოველი $0 \le k \le n$ და $x \epsilon [A, B]$ -თვის მომენტს τ_k^x , რომელსაც უწოდებენ გაჩერების მომენტს , წარმოადგენს მთელ რიცხვ მნიშვნელობიან შემთხვევით სიდიდეს , რომელიც განსაზღვრულია ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეზე . (τ_k^x -ის დამოკიდებულება ω-ზე არაა ცხადად ნაჩვენები) .

ცხადია , რომ ყველა $l < k$ სიმრავლე $\{\omega : \tau_k^x = l\}$ არის ხდომილობა , რომელიც იმაში მდგომარეობს , რომ შემთხვევითი ხეტიალი $\{S_i^x \ , 0 \le i \le k\}$ არის საწყის მომენტში x წერტილში და გამოვა (A, B) ინტერვალიდან l მომენტში . ცხადია ასევე , რომ $l \le k$ -სათვის სიმრავლეებს $\{\omega : \ \tau_k^x = l \ , \ S_l^x = A\}$ და $\{\omega : \ \tau_k^x = l \ , \ S_l^x = B\}$ აქვთ ხდომილობათა აზრი , რომელიც მდგომარეობს იმაში , რომ მოხეტიალე ნაწილაკი გამოვა (A, B) ინტერვალიდან l მომენტში , შესაბამისად A და B წერტილებში .

ყველა $0 \le k \le n$ -თვის აღვნიშნოთ

$$\mathcal{A}_k^x = \sum_{0 \le l \le k} \{\omega : \ \tau_k^x = l \ , \qquad S_l^x = A\}$$

$$\mathcal{B}_k^x = \sum_{0 \le l \le k} \{\omega : \ \tau_k^x = l \ , \qquad S_l^x = B\} \qquad (2)$$

და დავუშვათ $\alpha_k(x) = P(\mathcal{A}_k^x)$, $\beta_k(x) = P(\mathcal{B}_k^x)$, ნაწილაკის გამოსვლის ალბათობაა $[0, k]$ დროის განმავლობაში (A, B) ინტერვალიდან წერტილებში A და B შესაბამისად . ამ ალბათობებისთვის შეიძლება მივიღოთ რეკურენტული გამოსახულებები , რომლებიდანაც თანმიმდევრობით პოულობენ $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ და $\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)$. ცხადია , რომ $\alpha_0(x) = \beta_0(x)$. ვთქვათ ახლა $1 \le k \le n$, მაშინ

$$\beta_k(x) = P(\mathcal{B}_k^x) = P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x+1)P(\xi_1 = 1) + P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x-1)P(\xi_1 = -1) =$$
$$= pP(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x+1) + qP(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x-1)\,.$$

ვაჩვენოთ , რომ

$$P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x+1) = P\left(\mathcal{B}_{k-1}^{x+1}\right),$$
$$P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x-1) = P\left(\mathcal{B}_{k-1}^{x-1}\right).$$

ამისთვის ჩვენ აღვნიშნავთ , რომ სიმრავლე $\mathcal{B}_k^x$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $\mathcal{B}_k^x = \{\omega : (x, x+\xi_1, \dots, x+\xi_1+\dots+\xi_k) \in \mathcal{B}_k^x\}_x$,

სადაც $\mathcal{B}_k^x$ არის ასეთი სახის ტრაექტორიათა სიმრავლე $(x, x+x_1, \dots, x+x_1+\dots+x_k)$. $x_1 = \pm 1$, რომლებიც გამოდიან $[0,k]$ დროის განმავლობაში (A,B) ინტერვალიდან B წერტილში . (ნახაზი 15) .

წარმოვიდგინოთ სიმრავლე $\mathcal{B}_k^x$ შემდეგი სახით: $\mathcal{B}_k^{x,x+1} + \mathcal{B}_k^{x,x-1}$, სადაც $\mathcal{B}_k^{x,x+1}$ და $\mathcal{B}_k^{x,x-1}$-ის ტრაექტორიებია $\mathcal{B}_k^x$ –დან , რომლებისთვისაც $x_1 = +1$ და $x_1 = -1$. შესაბამისად.

შევნიშნოთ ახლა , რომ ყოველი ტრაექტორია $(x, x+1, x+1+x_2, \dots, x+1+x_2+\dots+x_k)$ $\mathcal{B}_k^{x,x+1}$ –დან იმყოფება ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში $(x+1, x+1+x_2, \dots, x+1+x_2+\dots+x_k)$ B_{k-1}^{x+1}-დან .

იგივე სამართლიანია $B_k^{x,x-1}$ -თვის . თუ მხედველობაში მივიღებთ ამ გარემოებას , ასევე დამოუკიდებლობას და ერთნაირად განაწილებულობის ერთობლიობის $\xi_1, \dots, \xi_k$ ვპოულობთ , რომ

$P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x+1) = P(\mathcal{B}_k^x | \xi_1 = 1) =$

$= P\{(x, x+\xi_1, \dots, x+\xi_1+\dots+\xi_k) \in \mathcal{B}_k^x | \xi_1 = 1\} =$

$= P\left\{(x+1, x+1+\xi_2, \dots, x+1+\xi_2+\dots+\xi_k) \epsilon B_{k-1}^{x-1}\right\} =$

$= P\left\{(x+1, x+1+\xi_1, \dots, x+1+\xi_1+\dots+\xi_{k-1}) \epsilon B_{k-1}^{x-1}\right\} = P\left(\mathcal{B}_{k-1}^{x-1}\right).$

ასევე $P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x-1) = P\left(\mathcal{B}_{k-1}^{x-1}\right)$. ამგვარად (3)-ის ძალით $x\epsilon(A,B)$ -თვის და $k \le n$

$\beta_k(x) = p\beta_{k-1}(x+1) + q\beta_{k-1}(x-1)$, სადაც $\beta_l(B) = 1$ და $\beta_l(A) = 0\,,\ 0 \le l \le n$. ანალოგიურად $\alpha_k(x) = p\alpha_{k-1}(x+1) + q\alpha_{k-1}(x-1)$, $\alpha_l(A) = 1$, $\alpha_l(B) = 0$, $0 \le l \le n$. რადგან $\alpha_0(x) = \beta_0(x) = 0\,,\ x\epsilon(A,B)$, მაშინ მიღებული რეკურენტული გამოსახულებები შეიძლება გამოვიყენოთ ალბათობების $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ და $\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)$ მოსაძებნად.

კონკრეტული ალბათობის გამოთვლა გვერდზე გადავდოთ , და კითხვა დავსვათ მათი მნიშვნელობების პოვნის შესახებ დიდი n –თვის .

ამ მიზნით ჩვენ შევნიშნავთ , რომ ვინაიდან $\mathcal{B}_{k-1}^x \subset \mathcal{B}_k^x$, $k \le n$, მაშინ $\beta_{k-1}(x) \le \beta_k(x) \le 1$. ბუნებრივია გავითვალისწინოთ , რომ საკმარისად დიდი n –თვის $\beta_n(x)$ ალბათობა ახლოსაა $\beta(x)$ განტოლების ამოხსნასთან . შემდეგი განტოლება $\beta(x) = p\beta(x+1) + q\beta(x-1)$ (7) სასაზღვრო პირობებით $(B) = 1$, $\beta(A)$=0 მიღებულია

ფორმალური ზღვარზე გადასვლით (4) და (5) –დან . (7) ამოცანის ამოხსნისთვის (8) –ში დავუშვათ , რომ თავიდან $p \neq q$. ადვილია შევნიშნოთ , რომ განხილულ განტოლებას აქვს ორი კერძო ამოხსნა a და $b(q/p)^x$, სადაც a და b მუდმივებია . ამიტომ $\beta(x)$ განტოლების ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით : $\beta(x) = a + b(q/p)^x$ (9) . (8) –ის გათვალისწინებით ვპოულობთ , რომ ყველა $A \leq x \leq B$ –თვის

$$\beta(x) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^A}{(q/p)^B - (q/p)^A} .$$

ვაჩვენოთ , რომ ეს არის ერთადერთი ამოხსნა განხილული ამოცანისთვის . ამ მიზნით , საკმარისია ვაჩვენოთ , რომ ყველა (7) , (8) ამოცანის ამოხსნა შეიძლება იყოს წარმოდგენილი (9)- ის სახით .

ვთქვათ $\tilde{\beta}(x)$ არის რაიმე ამოხსნა $\tilde{\beta}(A) = 0$, $\tilde{\beta}(B) = 1$ თვისებით . ყოველთვის შეიძლება მოვძებნოთ ისეთი $\tilde{a}$ და $\tilde{b}$, რომ

$$\tilde{a} + \tilde{b}(q/p)^A = \tilde{\beta}(A)$$

$$\tilde{a} + \tilde{b}(q/p)^{A+1} = \tilde{\beta}(A+1) .$$

(7) –დან გამომდინარეობს , რომ $\tilde{\beta}(A+2) = \tilde{a} + \tilde{b}(q/p)^{A+2}$ და $\tilde{\beta}(x) = \tilde{a} + \tilde{b}(q/p)^x$. (10) –ით მოძებნილი ამოხსნა არის განხილული ამოცანის ერთადერთი ამოხსნა .

$\alpha(x) = p\alpha(x+1) + q\alpha(x-1)$, $x \epsilon (A, B)$ (11) სასაზღვრო პირობებით $\alpha(A) = 1$ და $\alpha(B) = 0$ (12) მოიცემა ფორმულით

$$\alpha(x) = \frac{(q/p)^B - (q/p)^x}{(q/p)^B - (q/p)^A} \ , \ A \leq x \leq B \quad (13) .$$

თუ $p = q = 1/2$, მაშინ (7) , (8) და (11) , (12) ამოცანის ერთადერთი ამოხსნა $\beta(x)$ და $\alpha(x)$ შეესაბამება

$$\beta(x) = \frac{x - A}{B - A} \quad (14) \qquad \alpha(x) = \frac{B - x}{B - A} \quad (15).$$

შევნიშნოთ , რომ ნებისმიერი $0 \leq p \leq 1$ –თვის $\alpha(x) + \beta(x) = 1$ (16) . $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ სიდიდეებს შეიძლება ვუწოდოთ ***პირველი და მეორე მოთამაშის გაკოტრების ალბათობა ,*** შესაბამისად , როცა პირველი მოთამაშის საწყისი კაპიტალი არის $x - A$, მეორის $B - x$, განუსაზღვრელი რაოდენობის სვლებისთვის , რა თქმა უნდა , იგულისხმება არსებობა უსასრულო მიმდევრობების დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეების $\xi_1, \xi_2, \ldots$, სადაც $\xi_i = +1$ იგულისხმება როგორც პირველი მოთამაშის მოგება , ისევე $\xi_i = -1$ მისი წაგება . ამ პარაგრაფში განხილული სივრცე $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ აღმოჩნდება საკმაოდ “ღარიბი”, იმისთვის , რომ ასეთი მიმდევრობა ნამდვილად შეიძლება ავაგოთ და სიდიდეები $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ სინამდვილეში წარმოადგენენ გაკოტრების ალბათობებს შემოუსაზღვრელი სვლებისთვის .

მივმართოთ ზოგიერთ შედეგებს , რომლებიც გამომდინარეობენ მიღებული ფორმულებიდან .

თუ დავუშვებთ $A = 0$, $0 < x \leq B$, რომ ჩვენი აზრით $\beta(x)$ ფუნქცია იქნება ალბათობა იმისა , რომ ნაწილაკი , რომელიც გამოსულია x მდგომარეობიდან , მიაღწევს B წერტილი უფრო ადრე , ვიდრე 0 . (10) და (14) ფორმულებიდან გამომდინარეობს (ნახაზი: 1) , რომ

$$\beta(x) = \begin{cases} x/B \quad , \quad p = q = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{(q/p)^x - 1}{(q/p)^B - 1} \quad , \; p = q \end{cases} \quad (17).$$

შემდგომში დავუშვათ , რომ სრულდება უტოლობა $q > p$, რომელიც ნიშნავს , რომ პირველი მოთამაშისთვის თამაში არ არის სასურველი . მისი გაკოტრების ზღვრული ალბათობა $\alpha = \alpha(0)$ გვაძლევს ფორმულას

$$\alpha = \frac{(q/p)^B - 1}{(q/p)^B - (q/p)^A} \, .$$

შევნიშნოთ ახლა , რომ თამაშის პირობები შეცვლილია : მოთამაშეთა კაპიტალები ახლაც ერთნაირია $(-A)$ და B , მაგრამ თითოეული მოთამაშის თანხის გადახდა ახლა ტოლია $\frac{1}{2}$, და არა 1 -ის , როგორც ადრე , სხვანაირად რომ ვთქვათ , დავუშვათ ახლა $P\left(\xi_i = \frac{1}{2}\right) = p$, $P\left(\xi_i = -\frac{1}{2}\right) = q$. ამ შემთხვევაში პირველი მოთამაშის გაკოტრების ზღვრული ალბათობა აღვნიშნოთ $\alpha_{\frac{1}{2}}$ -ით , მაშინ

$$\alpha_{1/2} = \frac{(q/p)^{2B} - 1}{(q/p)^{2B} - (q/p)^{2A}} \; ,$$

და ნიშნავს

$$\alpha_{1/2} = \alpha \cdot \frac{(q/p)^B + 1}{(q/p)^B + (q/p)^A} > \alpha_1 \, ,$$

თუ $p > q$.

აქედან გამომდინარეობს ასეთი დასკვნა , თუ მოთამაშის თამაში წარუმატებელია (ე.ი $p > q$) , მაშინ ფსონის ***ორჯერ გაზრდით ამცირებს მის გაკოტრების ალბათობას .***

3.

ახლა განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ , თუ რა სისწრაფით იკრიბება $\alpha_n(x)$ და $\beta_n(x)$ ზღვრულ მნიშვნელობებისკენ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$. სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ , რომ $x = 0$ და აღვნიშნოთ

$$\alpha_n = \alpha_n(0)\,,\ \beta_n = \beta_n(0)\,,\ \gamma_n = 1-(\alpha_n+\beta_n)\,,$$

ცხადია , რომ $\gamma_n = P\{A < S_k < B\,,\ 0 \le k \le n\}$,საიდანაც $\{A < S_k < B\,,\ 0 \le k \le n\}$ აღნიშნავს ხდომილობას

$$\bigcap_{0 \le k \le n} \{A < S_k < B\}\,.$$

ვთქვათ $n = rm$, სადაც r და m არის მთელი რიცხვები

$\zeta_1 = \xi_1 + \cdots + \xi_m$,

$\zeta_2 = \xi_{m+1} + \cdots + \xi_{2m}$,

… … … … … … … …

$\zeta_r = \xi_{m(r-1)+1} + \cdots + \xi_{rm}$,

მაშინ , თუ $C = |A| + |B|$, ადვილად დავრწმუნდებით , რომ

$$\{A < S_k < B\,,\qquad 1 \le k \le rm\} \subseteq \{|\xi_1| < C, \dots, |\xi_r| < C\}\,,$$

ანუ სიდიდეების $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ დამოუკიდებლობის ძალით და მათი ერთნაირი განაწილებით

$$\gamma_n = P\{|\zeta_1| < C, \dots, |\zeta_r| < C\} = \prod_{i=1}^{r} P\{|\zeta_i| < C\} = (P\{|\zeta_1| < C\})^r \quad (18)$$

შევნიშნოთ , რომ $D\zeta_1 = m[1-(p-q)^2]$. ამიტომ საკმარისად დიდი m –ებისთვის $P\{|\zeta_1| < C\} \le \varepsilon_1$ (19) , სადაც $\varepsilon_1 < 1$, თუ კი $p = 0$ ან $q = 1$, მაშინ საკმარისად დიდი m –ებისთვის $P\{|\zeta_1| < C\} = 0$ და შესაბამისად , (19) სრულდება ყველა $0 \le p \le 1$ -თვის . (18) და (19)-დან გამომდინარეობს , რომ საკმაოდ დიდი n –ებისთვის $\gamma_n \le \varepsilon^n$ (20). საიდანაც $\varepsilon = \varepsilon_1^{1/m} < 1$.

(16)-ის თანახმად $\alpha + \beta = 1$. ამიტომ $(\alpha - \alpha_n) + (\beta - \beta_n) = \gamma_n$ და ამიტომ $\alpha \ge \alpha_n$, $\beta > \beta_n$ -თვის $0 \le \alpha - \alpha_n \le \gamma_n \le \varepsilon^n$ ან $0 \le \beta - \beta_n \le \gamma_n \le \varepsilon^n$, $\varepsilon < 1$.

ანალოგიური შეფასებები მართებულია სხვაობებისთვისაც $\alpha(x) - \alpha_n(x)$ და $\beta(x) - \beta_n(x)$.

4.

განვიხილოთ საკითხი შემთხვევითი ხეტიალის ***საშუალო ხანგრძლივობის*** შესახებ.

ვთქვათ $m_k(x) = M\tau_k^x$ გაჩერების მომენტის მათემატიკური ლოდინია . მოვიქცეთ ისე , როგორც რეკურენტული გამოსახულებების $\beta_n(x)$ –თვის გამოყვანის დროს ,ვღებულობთ , რომ $x \epsilon (A, B)$ –თვის

$$m_k(x) = M\tau_k^x = \sum_{1\le l\le k} lP(\tau_k^x = l) =$$

$$= \sum_{1\le l\le k} l[pP(\tau_k^x = l|\xi_1 = 1) + qP(\tau_k^x = l|\xi_1 = -1)] =$$

$$= \sum_{1\le l\le k} l\left[pP\left(\tau_{k-1}^{x+1} = l-1\right) + qP\left(\tau_{k-1}^{x-1} = l-1\right)\right] =$$

$$= \sum_{0\le l\le k-1} (l+1)\left[pP\left(\tau_{k-1}^{x+1} = l\right) + qP\left(\tau_{k-1}^{x-1} = l\right)\right] =$$

$$= pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) +$$

$$+ \sum_{0\le l\le k-1} \left[pP\left(\tau_{k-1}^{x+1} = l\right) + qP\left(\tau_{k-1}^{x-1} = l\right)\right] = pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) + 1\,.$$

მაშასადამე $x\epsilon(A,B)$ და $0 \le k \le n$ ფუნქციები $m_k(x)$ აკმაყოფილებენ რეკურენტულ განტოლებებს ,

$$m_k(x) = 1 + pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) \ \ (21),$$

სადაც $m_0(x) = 0$ და ამ განტოლებებიდან სასაზღვრო პირობებთან ერთად $m_k(A) = m_k(B) = 0$ შეიძლება თანმიმდევრობით ვიპოვოთ $m_1(x), \ldots, m_n(x)$, მაშინ $m_k(x) \le m_{k-1}(x)$ -თვის არსებობს

$$m(x) = \lim_{n\to\infty} m_n(x)\,,$$

რომელიც (21)-ის ძალით აკმაყოფილებს განტოლებას

$$m(x) = 1 + pm(x+1) + qm(x-1) \ \ (23)$$

სასაზღვრო პირობებით $m(A) = m(x) = 0$ (24) . რომ ვიპოვოთ ამ განტოლების ამონახსნი , თავიდან დავუშვათ , რომ $m(x) < \infty$, $x\epsilon(A,B)$ (25). მაშინ , თუ $p \ne q$ კერძო ამონახსნს აქვს შემდეი სახე : $\frac{x}{q-p}$ და საერთოდ, ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$m(x) = \frac{x}{q-p} + a + b\left(\frac{q}{p}\right)^x,$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისინებით ვპოულობთ , რომ

$$m(x) = \frac{1}{p-q}[B\beta(x) + A\alpha(x) - x]\,, (26),$$

სადაც $\beta(x)$ და $\alpha(x)$ განისაზღვრებიან ფორმულებით (10) და (13) . თუ $p = q = 1/2$, მაშინ (23) განტოლების ამონახსნს აქვს შემდგი სახე :

$m(x) = a + bx + x^2$ და მაშინ $m(A) = m(B)$ ან $m(x) = (B - x)(x - A)$ (27). აქედან კერძოდ გამომდინარეობს , რომ თუ მოთამაშეების საწყისი კაპიტალი ტოლია ($B = -A$) , მაშინ $m(0) = B^2$.

ავიღოთ $B = 10$ და თუ თამაშის თითოეული სვლა ხორციელდება 1 წმ-ში , მაშინ საშუალო გაკოტრების დრო ერთ-ერთი მოთამაშის საკმაოდ დიდია და ის უდრის 100 წმ-ს.

(26) და (27) ფორმულები მიღებულია იმ დაშვებაში , რომ $m(x) < \infty$, $x\epsilon(A, B)$. ვაჩვენოთ , რომ სინამდვილეში $m(x)$ სასრულია ყველა $x\epsilon(A, B)$ -თვის . შემოვიფარგლოთ $x = 0$ შემთხვევით . ზოგადი შემთხვევა განიხილება ანალოგიურად.

ვთქვათ $p = q = 1/2$ მიმდევრობა $S_1, S_2, \dots, S_n$ და გაჩერების $\tau_n = \tau_n^0$ მომენტებს დავუკავშირებთ S_{τ_n} შემთხვევით სიდიდეს , რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$S_{\tau_n} = \sum_{k=0}^{n} S_k I_{\{\tau_n = k\}}(\omega) \ . (28)$$

ცხადია , ეს არის შემთხვევითი ხეტიალის მნიშვნელობა τ_n გაჩერების მომენტში . ამ დროს , თუ $\tau_n < n$, მაშინ $S_{\tau_n} \leq A$ ან B . თუ კი $\tau_n = n$, მაშინ $A \leq S_n \leq B$. დავამტკიცოთ , რომ $p = q = 1/2$ -თვის $MS_{\tau_n} = 0$ (29) და $MS_{\tau_n}^2 = M\tau_n$ (30) .

პირველი ტოლობის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ , რომ

$$MS_{\tau_n} = \sum_{k=0}^{n} M\big[S_k I_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\big] = \sum_{k=0}^{n} M\big[S_k I_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\big] + \sum_{k=0}^{n} M\big[(S_k - S_n) I_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\big] =$$

$$= MS_n + \sum_{k=0}^{n} M\big[(S_k - S_n) I_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\big] \quad (31),$$

საიდანაც ცხადია $MS_n = 0$. ვაჩვენოთ , რომ

$$\sum_{k=0}^{n} M\big[(S_k - S_n) I_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\big] = 0 \ .$$

$0 \leq k < n$ –თვის $\{\tau_n > k\} = \{A < S_1 < B, \dots, A < S_k < B\}$ ხდომილობა

$\{A < S_1 < B, \dots, A < S_k < B\}$ შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შემდეგი სახით:

$$\{\omega : \ (\xi_1, \dots, \xi_k)\epsilon A_k\} \qquad (32) \ ,$$

სადაც A_k რომელიღაცა ქვესიმრავლეა სიმრავლის $\{-1,1\}^k$. სხვანაირად რომ ვთქვათ , ეს სიმრავლე განისაზღვრება მხოლოდ $\xi_1, \dots, \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეებით და არ არიან დამოუკიდებლები $\xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ სიდიდეების მნიშვნელობებზე , ვინაიდან სიმრავლე $\{\tau_n = k\} = \{\tau_n > k - 1\} \backslash \{\tau_n > k\}$, მაშინ ისიც არის სიმრავლე (32)-სახისა და $0 \leq k \leq n$ – თვის შემთხვევითი სიდიდეები $S_n - S_k$ და $I_{\{\tau_n = k\}}$ დამოუკიდებელია , რომელიც ნიშნავს :

$$M\big[(S_n - S_k)I_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\big] = M[(S_n - S_k] \cdot M\big[I_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\big] = 0 .$$

ამგვარად (29) ფორმულა დადგენილია .

იგივე მეთოდით მტკიცდება ფორმულა (30) :

$$MS_{\tau_n}^2 = \sum_{k=0}^{n} MS_k^2 I_{\{\tau_n=k\}} = \sum_{k=0}^{n} M\big([S_n + (S_k - S_n)]^2 \cdot I_{\{\tau_n=k\}}\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\big[MS_k^2 I_{\{\tau_n=k\}} + 2MS_n(S_k - S_n)I_{\{\tau_n=k\}} + M(S_n - S_k)^2 I_{\{\tau_n=k\}}\big] =$$

$$= MS_n^2 - \sum_{k=0}^{n} M(S_n - S_k)^2 I_{\{\tau_n=k\}} = n - \sum_{k=0}^{n}(n-k)P(\tau_n = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} kP(\tau_n = k) = M\tau_n .$$

და ამგვარად $p = q = 1/2$ -თვის ადგილი აქვს ფორმულებს (29) , (30). ნებისმიერი p და q $(p + q = 1)$ ანალოგიურად დგინდება , რომ

$$MS_{\tau_n} = (p - q)M\tau_n \quad (33),$$

$$M[S_\tau - \tau_n M\xi_1]^2 = D\xi_1 \cdot M\tau_n \quad (34),$$

მიღებული გამოსახულებების დახმარებით ვაჩვენოთ , რომ

$$\lim_{n\to\infty} m_n(0) = m(0) < \infty .$$

თუ $p = q = 1/2$, მაშინ (30) –ის ძალით

$$M\tau_n \le max(A^2, B^2) \ (35).$$

თუ კი $p \ne q$, მაშინ (33) –დან

$$M\tau_n \le \frac{max(|A|, B)}{|p - q|} \quad (36) ,$$

საიდანაც ცხადია , რომ $p = q = 1/2$ –თვის

$$M\tau_n = MS_{\tau_n} = A^2\alpha_n + B^2\beta_n + M\big[S_n^2 I_{\{\tau_n=n\}}\big]$$

და მაშინ

$$A^2\alpha_n + B^2\beta_n \le M\tau_n \le A^2\alpha_n + B^2\beta_n + max(A^2, B^2) \cdot \gamma_n$$

(20) უტოლობასთან ერთად , აქედან ირკვევა , რომ , როცა $n \to \infty$, მაშინ $M\tau_n$ მიდის ზღვრულ მნიშვნელობებისკენ ექსპონენციალურად სწრაფად

$$m(0) = A^2\alpha + B^2\beta = A^2 \cdot \frac{B}{B-A} - B^2 \cdot \frac{A}{B-A} = |AB| .$$

ანალოგიური შედეგი სამართლიანია $p \neq q$ შემთხვევის დროსაც:

$$M\tau_n \to m(0) = \frac{\alpha A + \beta B}{p - q},$$

ექსპონენციალურად სწრაფად .

§ 2 . არეკლის პრინციპი . არკსინუსის კანონი .

1.

როგორც წინა პარაგრაფში , აქაც ვუშვებთ , რომ $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$ არის ერთნაირად განაწილებული ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეები $P(\xi_i = 1) = p$, $P(\xi_i = -1) = q$ ისეთი , რომ$\xi_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$, $1 \leq k \leq 2n$; $S_0 = 0$.

აღვნიშნოთ $\sigma_{2n} = min\{ 1 \leq k \leq 2n : \; S_k = 0\}$. ვუშვებთ , რომ $\sigma_{2n} = \infty$, თუ ყველა $S_k \neq 0$, $1 \leq k \leq 2n$. სავსებით ცხადია რომ σ_{2n} , ეს არის ნულში პირველი დაბრუნების მომენტი . ამ მომენტის თვისებები იქნება შესავლილი ჩვენს პარაგრაფში . შემდგომში დავუშვებთ , რომ ვიხილავთსიმეტრიულ შემთხვევით ხეტიალს . ე. ი $p = q = 1/2$. აღვნიშნოთ $0 \leq k \leq n$ –თვის

$$u_k = P(S_{2k} = 0)\, , \, f_{2k} = P(\sigma_{2n} = 2k)(1),$$

ცხადია , რომ $u_0 = 1$ და $u_k = C_{2k}^k \cdot 2^{-2k}$.

ჩვენი უახლოესი მიზანია ვაჩვენოთ , რომ ალბათობა f_{2k} ,$1 \leq k \leq n$ -თვის განისაზღვრება ფორმულით :

$$f_{2k} = \frac{1}{2k} u_{2(k-1)}(2).$$

ცხადია , რომ $1 \leq k \leq n$ -თვის

$$\{\sigma_{2n} = 2k\} = \{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_3 \neq 0, \dots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} \neq 0\}$$

და სიმეტრიის ძალით

$$f_{2k} = P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} \neq 0\} = 2P\{S_1 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} > 0\}(3).$$

დავარქვათ k სიდიდის გზა $(S_0, \dots, S_n)$ რიცხვების მიმდევრობას და $L_k(A)$ -ს ვუწოდოთ k სიგრძის გზების რაოდენობა , რომლისთვისაც სრულდება თვისება A , მაშინ

$$f_{2k} = 2 \sum_{(\alpha_{2k+1},\dots,\alpha_n)} L_{2n}(S_1 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 0, S_{2k+1}) =$$

$$= a_{2k+1}, \dots, S_{2n} = (a_{2k+1} + \dots + a_{2n}) \cdot 2^{-2n} =$$

$$= 2L_{2k}(S_1 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 0) \cdot 2^{-2k} (4),$$

სადაც აჯამვა ვრცელდებაყველა $(a_{2k+1}, \dots, a_{2n})$ მწკრივებისთვის $a_i = \pm 1$. ე.ი f_{2k} ალბათობის პოვნა დაიყვანება L_{2k} გზების რიცხვების დათვლაზე .

$$L_k(S_1 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2n} = 0) .$$

ლემა 1. ვთქვათ a და b არის მთელი არაუარყოფითი რიცხვები . $a - b > 0$ და $= a + b$, მაშინ

$$L_k(S_1 > 0, \dots, S_{k-1} > 0, S_k = a - b) = \frac{a - b}{k} C_k^a (5).$$

დამტკიცება : ნამდვილად

$$L_k(S_1 > 0, \dots, S_{k-1} > 0, S_k = a - b) = L_k(S_1 = 0, S_2 > 0, \dots, S_{k-1} > 0, S_k = a - b) =$$

$$= L_k(S_1 = 1, S_k = a - b) - L_k(S_1 = 1, S_k = a - b\, ;\ \exists i, 2 \le i \le k - 1,\ S_i \le 0)\ (6).$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ , $(S_0, \dots, S_n)$ დადებითი მნიშვნელობები , რომლებიც იწყება (1,1) წერტილიდან და სრულდება $(k, a - b)$ წერტილში , ემთხვევა მნიშვნელობებს , რომლებიც იწყებიან (1,1) წერტილიდან $(k, a - b)$ წერტილამდე , იმ გზების გამოკლებით , რომლებიც ეხებიან ან კვეთენ დროის ღერძს .

შევნიშნოთ ახლა , რომ

$$L_k(S_1 = 1, S_k = a - b\, ;\ \exists i, 2 \le i \le k - 1, S_i \le 0) = L_k(S_1 = -1, S_k = a - b) (7).$$

ე.ი გზების რაოდენობა $\alpha = (1,1)$ წერტილიდან გამოდის და მიდის $\beta = (k, a - 1)$ წერტილში და მნიშვნელობების რაოდენობა ეხებიან ან კვეთენ დროის ღერძს , ემთხვევიან ყველა გზების რაოდენობას , რომლებიც გამოდის $\alpha^* = (1, -1)$ და მიდიან $\beta = (k, a - b)$ -ში. ამ დებულების დამტკიცებიდან , რომელსაც ჰქვია არკსინუსის პრინციპი , გამომდინარეობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა გზებს შორის ,

$A = (S_1, \dots, S_a, S_{a+1}, \dots, S_k)$, რომლებიც აერთებენ წერტილებს α^* და β გზებს შორის , $B = (-S_1, \dots, -S_a, -S_{a+1}, \dots, S_l)$, საიდანაც A პირველი წერტილია და A და B ხდებიან 0-ის . ტოლი.

(6) და (7) –დან გამომდინარეობს , რომ

$$L_k(S_1 > 0, \dots, S_{k-1} > 0, S_k = a - b) = L_k(S_1 = 1, S_k = a - b) - L_k(S_1 = -1, S_k = a - b) =$$

$$= C_{k-1}^{a-1} - C_{k-1}^{a} = \frac{a - b}{k} C_k^a ,$$

რაც ასრულებს (5) –ის დამტკიცებას .

გამოვთვალოთ ალბათობები f_{2k} , (4) და (5) –ის თანახმად ვპოულობთ , რომ

$(a = k, b = k - 1)$,

$f_{2k} = 2L_{2k}(S_1 > 0, \dots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 0) \cdot 2^{-2k} =$

$= 2L_{2k}(S_1 > 0, \dots, S_{2k-1} = 1) \cdot 2^{-2k} = 2 \cdot 2^{-2k} \cdot \dfrac{1}{2k-1} C_{2k-1}^{k} = \dfrac{1}{2k} u_{2(k-1)}$.

მაშასადამე ფორმულა (2) დამტკიცებულია .

მოვიყვანოთ ამ ფორმულის კიდევ ერთი დამტკიცება , რომელიც დამყარებულია შემდეგ შენიშვნაზე . უშუალოდ შემოწმება გვიჩვენებს , რომ

$$\frac{1}{2k} u_{2(k-1)} = u_{2(k-1)} - u_{2k} (8).$$

ამავე დროს ცხადია , რომ

$\{\sigma_{2n} = 2k\} = \{\sigma_{2n} > 2(k-1)\} \setminus \{\sigma_{2n} > 2k\}$

$\{\sigma_{2n} = 2l\} = \{S_1 \neq 0, \dots, S_k \neq 0\}$,

რომლებიც ნიშნავს , რომ

$\{\sigma_{2n} = 2k\} = \left\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2(k-1)} \neq 0\right\} \setminus \{S_1 \neq 0, \dots, S_{2k} \neq 0\}$,

ამიტომ

$f_{2k} = P\left\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2(k-1)} \neq 0\right\} - P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2k} \neq 0\}$ და შესაბამისად (8) ტოლობის დამტკიცებისთვის

$$f_{2k} = \frac{1}{k} u_{2(k-1)}$$

საკმარისია დავამტკიცოთ , რომ $L_{2k}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2k} \neq 0) = L_{2k}(S_{2k} = 0)$ (9). ამ მიზნით შევნიშნოთ , რომ ცხადია დებულება

$$L_{2k}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2k} \neq 0) = L_{2k}(S_1 > 0, \dots, S_{2k} > 0) .$$

ამიტომ (9) –ის შემოწმებისთვის საკმარისია დავადგინოთ , რომ

$$2L_{2k}(S_1 > 0, \dots, S_{2k} > 0) = L_{2k}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2k} \geq 0) \ (10)$$

და

$$L_{2k}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2k} \geq 0) = L_{2k}(S_{2k} = 0)(11).$$

(10) და (11) ტოლობა იქნება დამტკიცებული , თუ ვაჩვენებთ , რომ გზებს შორის $A=(S_1,\dots,S_{2k})$, რომლისთვისაც ერთი მაინც $S_i=0$ ან დადებით გზებს შორის $B=(S_1,\dots,S_{2k})$ შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა .

დავუშვათ $A=(S_1,\dots,S_{2k})$ არაუარყოფითი გზაა , რომელიც ჩადის 0-ში a წერტილში (ე.ი.$S_a=0$) . გამოვუშვათ წერტილიდან $(a,2)$ ტრაექტორია (რომელიც ნახაზზე აღნიშნულია დაშტრიხული ხაზებით) , $(S_a+2, S_{a+1}+2,\dots,S_{2k}+2$, მაშინ $B=(S_1,\dots,S_{a-1},S_a+2,\dots,S_{2k}+2)$გზა არის დადებითი . პირიქით , ვთქვათ $B=(S_1,\dots,S_{2k})$ რაიმე დადებითი გზაა , და b არის დროის ის მომენტი , რომლისთვისაც $S_b=1$, (ნახაზი:5) მაშინ გზა $A=(S_1,\dots,S_b,S_{b+1}-2,\dots,S_k-2)$ არის უარყოფითი . მოყვანილი კონსტრუქციიდან გამომდინარეობს , რომ დადებით და უარყოფით გზებს შორის , რომლებისთვისაც ერთი მაინც $S_i=0$, არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა , მაშინ (10) ფორმულა დამტკიცებულია.

დავადგინოთ ახლა (11) ტოლობის სამართლიანობა . სიმეტრიის და (10) –ის ძალით საკმარისია დავამტკიცოთ , რომ

$$L_{2k}(S_1>0,\dots,S_{2k}>0)+L_{2k}(S_1\geq 0,\dots,S_{2k}\geq 0)$$

და $\exists i$, $1\leq i\leq 2k$ ისეთი , რომ $S_i=0=L_{2k}(S_{2k}=0)$.

მნიშვნელობების სიმრავლე $(S_{2k}=0)$შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი $\mathscr{b}_1$ და $\mathscr{b}_2$ ჯამის სახით , სადაც $\mathscr{b}_1$ -ის გზებია $(S_0,\dots,S_{2k})$, რომელსაც მხოლოდ ერთი მინიმუმი აქვს და $\mathscr{b}_2$-ის გზები მინიმუმს აღწევენ ორ წერტილში მაინც .

ვთქვათ $C_1=\mathscr{b}_1$ (ნახაზი: 6) და γ არის მინიმუმის წერტილი . $C_1=(S_0,\dots,S_{2k})$ მნიშვნელობებს შეესაბამება C_1^* მნიშვნელობა , რომელიც მიიღება შემდეგი ხერხით (ნახაზი: 7) . ავსახოთ ტრაექტორია $(S_0,\dots,S_{2l})$ ვერტიკალური ღერძის ახლოს , რომელიც გადის l წერტილზე და მიღებული ტრაექტორია გადავიტანოთ მარჯვნივ და ზევით და გამოვუშვათ იგი $(2k,0)$ წერტილიდან . შემდეგ გადავიტანოთ კოორდინატთა სათავე $(l,-m)$ –ში . მიღებული ტრაექტორია C_1^* იქნება დადებითი გზა .

ზუსტად ასევე , ვთქვათ $C_2=\mathscr{b}_2$, მაშინ იმავე ხერხით მას შეიძლება შევუსატყვისოთ რაიმე არაუარყოფითი C_2^* გზა . პირიქით , ვთქვთ

$C_1^*=(S_1>0,\dots,S_{2k}>0)$რაიმე არაუარყოფითი გზაა , რომლისთვისაც $S_{2k}=2m$ (ნახაზი: 7). შევუსატყვისოთ მას C_1 , რომელიც მიღებულია შემდეგი სახით . დავუშვათ p ბოლო წერტილია , საიდანაც $S_p=m$. ავსახოთ $(S_p,\dots,S_{2m})$, $x=p$, ვერტიკალურ ღერძთან ახლოს და გადავიტანოთ ტრაექტორია ქვემოთ და მარცხნივ ისე, რომ მისი მარჯვენა ბოლო დაემთხვეს (0,0) წერტილს . მიღებული ტრაექტორიის საკოორდინატო სათავე გადავიტანოთ მარცხენა ბოლოში (ეს იქნება ის ტრაექტორია , რომელიც გამოსახულია ნახაზზე: 20) მიღებულ გზას $C_1=(S_0,\dots,S_{2k})$ -ს აქვს მინიმუმი და $S_{2k}=0$, ანალოგიურ კონსტრუქციას მივყავართ გზებისკენ , რომლებსაც ორი მინიმუმი გააჩნიათ და $(S_1\geq 0,\dots,S_{2k}\geq 0)$ და $\exists i$, $1\leq i\leq 2k$ ისეთი , რომ $S_i=0$,$S_{2k}=0$. ამით დგინდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა , რომელიც სწორედ ამტკიცებს საჭირო (11) შედეგს . მაშასადამე ტოლობა (9) და , შესაბამისად ფორმულა

$$f_{2k} = u_{2(k-1)} - u_{2k} = \frac{1}{2k} u_{2(k-1)}$$

დადგენილია .სტირლინგის ფორმულიდან

$$u_{2k} = C_{2k}^{k} \cdot 2^{-2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \quad , \qquad k \to \infty \, .$$

ამიტომ

$$f_{2k} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}} \ , \ k \to \infty \, .$$

აქედან გამომდინარეობს , რომ პირველად 0-ში დაბრუნების დროს მათემატიკური ლოდინი

$$Mmin(\sigma_{2n}, 2n) = \sum_{k=1}^{n} 2kP(\sigma_{2n} = 2k) + 2nu_{2n} = \sum_{k=1}^{n} u_{2(k-1)} + 2nu_{2n}$$

არის საკმარისად დიდი . უფრომეტიც

$$\sum_{k=1}^{n} u_{2(k-1)} = \infty \, ,$$

შესაბამისად , შემთხვევითი ხეტიალის 0-ში დაბრუნების საშუალო ხანგრძლივობა , შემთხვევითი ხეტიალის ზღვრული მნიშვნელობა უდრის ∞ -ს . (უსასრულო ბიჯების რაოდენობისთვის). ეს გარემოება ხსნის სიმეტრიული შემთხვევითი ხეტიალის მოულოდნელ თავისებურებებს . მაგალითად იყო მოლოდინი იმისა , რომ $2n$ დროის განმავლობაში იქნებოდა ყაიმების რიცხვი ორი სხვადასხვა მოთამაშისგან . $(p = q = 1/2)$. ე.ი i მომენტის რიცხვი , რომლისთვისაც $S_i = 0$, უნდა იყოს $2n$ –ის პროპორციული , თუმცა საბოლოო ჯამში ყაიმების რაოდენობა$\sqrt{2}\, n$ რიგისაა . აქედან გამომდინარეობს , კერძოდ , რომ მიუხედავად ლოდინისა, $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ <<ტიპიური>> ხეტიალის რეალიზებას უნდა ჰქონდეს არა სინუსოიდური ხასიათი (რომელიც მაგალითად ნაწილაკი დროის ნახევარს ატარებს დადებით მხარეს და მეორე ნახევარსუარყოფით მხარეს) , არამედ გრძელი ხანგრძლივი ტალღის ხასიათი . ზუსტი ფორმულის დამტკიცება მოიცემა ე.წ არკსინუსის კანონით და ახლა ამ თემის გადმოცემას შევუდგებით .

2.

$P_{2k,2n}$ –ით აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა , რომ $[0,2n]$ რიცხვით მონაკვეთზე ნაწილაკი $2k$ იმყოფება დადებით მხარეს .

<u>**ლემა 2:**</u> ვთქვათ $u_0 = 1$ და $0 \le k \le n$, მაშინ

$$u_{2k} = \sum_{r=1}^{k} f_{2k} \cdot u_{2(k-r)} \, (13).$$

რამდენადაც $\{S_{2k} = 0\} \subseteq \{\sigma_{2n} \le 2k\}$, მაშინ

$$\{S_{2k} = 0\} = \{S_{2k} = 0\} \cap \{\sigma_{2n} \le 2k\} = \sum_{1 \le l \le k} \{S_{2k} = 0\} \cap \{\sigma_{2n} = 2l\} \, .$$

აქედან გამომდინარეობს , რომ

$$u_{2k} = P(S_{2k} = 0) = \sum_{1 \le l \le k} P(S_{2k} = 0, \sigma_{2n} = 2l) = \sum_{1 \le l \le k} P(S_{2k} = 0 | \sigma_{2k} = 2l) P(\sigma_{2n} = 2l),$$

მაგრამ

$P(S_{2k} = 0 | \sigma_{2k} = 2l) = P(S_{2k} = 0 | S_1 \neq 0, \dots, S_{2l-1} \neq 0, S_{2l} = 0) =$

$= P(S_{2l} + (\xi_{2l+1}, \dots, \xi_{2k}) | S_{2l} = 0) = P(\xi_{2l+1} + \cdots + \xi_{2k} = 0) = P\big(S_{2(k-l)} = 0\big)$.

ამიტომ

$$u_{2k} = \sum_{1 \le l \le k} P\big(S_{2(k-l)} = 0\big) P(\sigma_{2n} = 2l),$$

რასაც (13) ამტკიცებს .

გადავიდეთ (12) ფორმულის დამტკიცებაზე . $k = 0$ და $k = n$ –თვის სამართლიანობა თვალსაჩინოა .

ვთქვათ ახლა $1 \le k \le n - 1$. თუ ნაწილაკი $2k$ დროის მომენტში არის დადებით მხარეს , მაშინ ის გადის 0 –ზე . ვთქვათ $2r$ არის ნულთან დაბრუნების პირველი მომენტი . შესაძლოა ორი შემთხვევა : როცა $S_l \ge 0$, $l \le 2r$ და $S_l \le 0$, $l \le 2r$. ადვილია შევნიშნოთ , რომ მნიშვნელობათა რიცხვი , რომელიც შეესაბამება პირველ შემთხვევას ტოლია

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 2^{2r} \cdot f_{2r}\right) \cdot 2^{2(n-r)} P_{2(k-r),2(n-r)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2n} \cdot f_{2r} \cdot P_{2(k-r),2(n-r)} .$$

მეორე შემთხვევისთვის მნიშვნელობათა რიცხვი ტოლია :

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{2n} \cdot f_{2r} \cdot P_{2k,2(n-r)} .$$

მაშასადამე $1 \le k \le n - 1$ –თვის

$$P_{2k,2n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} f_{2k} P_{2(k-r),2(n-r)} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} f_{2k} P_{2k,2(n-r)} (14).$$

მივუთითოთ , რომ ფორმულა $P_{2k,2m} = u_{2k} \cdot u_{2k-2m}$ მართებულია $m = 1, \dots, n-1$-თვის მაშინ (13) და (14) –დან ვპოულობთ , რომ

$$P_{2k,2n} = \frac{1}{2} u_{2n-2k} \cdot \sum_{r=1}^{k} f_{2r} \cdot u_{2k-2r} + \frac{1}{2} u_{2k} \cdot \sum_{r=1}^{k} f_{2r} \cdot u_{2n-2r-2k} =$$

$$= \frac{1}{2} u_{2n-2k} \cdot u_{2k} + \frac{1}{2} u_{2k} \cdot u_{2n-2k} = u_{2k} \cdot u_{2n-2k} .$$

ლემა დამტკიცებულია .

ახლა , ვთქვათ $\gamma(2n)$ არის დროის ერთეულის რიცხვი , რომლის დროსაც ნაწილაკი იმყოფება დადებით ღერძზე $[0,2n]$ ინტერვალში , მაშინ $x < 1$ –თვის

$$P\left\{\frac{1}{2} < \frac{\gamma(2n)}{2n} \le x\right\} = \sum_{\left\{k:\,\frac{1}{2}<\frac{2k}{2n}<x\right\}} P_{2k,2n}\,,$$

როცა $n \to \infty$, $u_{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, მაშინ

$$P_{2k,2n} = u_{2k} \cdot u_{2(n-k)} \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\,,$$

თუ $n \to \infty$. ამიტომ

$$\sum_{\left\{k:\,\frac{1}{2}<\frac{2k}{2n}\le x\right\}} P_{2k,2n} - \sum_{\left\{k:\,\frac{1}{2}<\frac{2k}{2n}\le x\right\}} \frac{1}{\pi n}\left[\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right]^{1/2} \to 0\,,$$

საიდანაც

$$\sum_{\left\{k:\,\frac{1}{2}<\frac{2k}{2n}\le x\right\}} P_{2k,2n} - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \to 0\,, \qquad n \to \infty\,.$$

მაგრამ სიმეტრიის შესაბამისობიდან

$$\sum_{\left\{k:\,\frac{1}{2}<\frac{2k}{2n}\le x\right\}} P_{2k,2n} \to \frac{1}{2}\,.$$

ამით დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა (არკსინუსისკანონი) . ალბათობა იმისა , რომ დროის წილი რომლის დროსაც ნაწილაკი იმყოფება დადებით მხარეს , ნაკლებია ან ტოლია x-ის , მაშინ ესალბათობა მიისწრაფის

$$2\pi^{-1} arcsin\sqrt{x}\colon \sum_{\left\{k:\,\frac{1}{2}<\frac{k}{n}\le x\right\}} P_{2k,2n} \to 2\pi^{-1} arcsin\sqrt{x}\,.(15).$$

შევნიშნოთ , რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია $P(t)$ ინტეგრალში $\frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ წარმოადგენს u-ს სახის მრუდს , რომელიც მიისწრაფის უსასრულობაში $t=0$ და $t=1$ წერტილში .

აქედან გამომდინარეობს , რომ დიდი n –ებისთვის

$$P\left\{0 < \frac{\gamma(2n)}{2n} \le \Delta\right\} > P\left\{\frac{1}{2} < \frac{\gamma(2n)}{2n} \le \frac{1}{2} + \Delta\right\},$$

ე.ი რაც უფრო მეტია ალბათობა იმისა , რომ , რომლის დროსაც ნაწილაკი იმყოფება დადებით მხარეს , იქნება ახლოს 0-თან ან 1-თან , ბუნებრივად მოსალოდნელ მნიშვნელობასთან $\frac{1}{2}$ –თან. გამოვიყენოთ არკსინუსის ცხრილი და ვიხელმძღვანელოთ იმ გარემოებებით , რომ საბოლოო ჯამში კრებადობის სიჩქარე (15)-ში ძალიან ჩქარია . გამოდის , რომ

$$P\left\{\frac{\gamma(2n)}{2n} \le 0{,}024\right\} \approx 0{,}1$$

$$P\left\{\frac{\gamma(2n)}{2n} \le 0{,}1\right\} \approx 0{,}2$$

$$P\left\{\frac{\gamma(2n)}{2n} \le 0{,}2\right\} \approx 0{,}3$$

$$P\left\{\frac{\gamma(2n)}{2n} \le 0{,}65\right\} \approx 0{,}6\,.$$

§ 3 . სიმეტრიული შემთხვევითი ხეტიალი .

ბროუნის მოძრაობის შექმნას ჩვენ ვიწყებთ სიმრტრიულ ხეტიალთან ერთად , რომლის პირველი გზანა ჩვენებია (ნახაზზე 1) . შემთხვევითი სიმეტრიული ხეტიალის აგებისას , ჩვენ ხელახლა ვაგდებთ რეალურ მონეტას (p , H –ის ალბათობა ყოველ აგდებაზე და $q = 1 - p$, T ალბათობა ყოველ აგდებაზე , ორივე ერთად არის $\frac{1}{2}$-ის ტოლი). ჩვენ აგდების მიმდევრობისშედეგებს აღვენიშნავთ $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots$ -ით .სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ , ω არის აგდების უსასრულო მიმდევრობა და ω_i არის n ადგების შედეგი .

$$X_j = \begin{cases} 1\,, \omega_j = H \\ -1, \omega_j = T \end{cases}$$

და აღვნიშნოთ $M_0 = 0$,

$$M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j \quad , \qquad k = 1{,}2 \ldots$$

M_k , $k = 1{,}2 \ldots$პროცესი არის სიმეტრიული შემთხვევითი ხეტიალი . ყოველი აგდებისას ის ან მიაღწევს ერთერთეულს ან ჩამოვა ერთერთეულამდე და ამ ორი თვისების ტოლობა შესაძლებელია .

§ 4 . სიმეტრიული შემთხვევითი ხეტიალის ზრდადობა .

შემთხევით ხეტიალს აქვს დამოუკიდებელი ნაზრდი . ეს იმას ნიშნავს , რომ თუ ჩვენ ამოვირჩევთ არაუარყოფით $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_m$, შემთხვევითი სიდიდეები $M_{k_1} = \left(M_{k_1} - M_{k_0}\right), \left(M_{k_2} - M_{k_1}\right), \ldots, \left(M_{k_m} - M_{k_{m-1}}\right)$ იქნებიან დამოუკიდებლები . ყოველ ამ შემთხვევითსიდიდეს

$$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$$

ეწოდება შემთხვევითი ხეტიალის ნაზრდი . ესაა შემთხვევითი ხეტიალის ცვლილება k_i-სა და k_{i+1}-ს შორის . ჩვენი ნაზრდები არის დამოუკიდებელი იმიტომ , რომ ისინი

დამოკიდებულია სხვა და სხვა მონეტის აგდებაზე . უფრო მეტი , ყოველ $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$ ნაზრდს აქვს მათემატიკური ლოდინი 0 და დისპერსია $k_{i+1} - k_i$. მარტივი დასანახია , რომ მათემატიკური ლოდინი არის 0 იმიტომ , რომ ლოდინის შეფასება ყოველ X_j ჩვენებისას (3.2.3)-ის მარჯვენა მხარეს არის 0 . ჩვენ აგრეთვე გვაქვს $Var(X_j) = EX_j^2$=1 და განსხვავებული X_j -თვის არიან დამოუკიდებლები . ჩვენ (3.2.3)- დან გვაქვს , რომ

$$Var(\ M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} Var(X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 = k_{i-1} - k_i \,.$$

სიმეტრიული შემთხვევითი ხეტიალის ცვლილება თავს იყრის ერთ ერთეულთან . ასე , რომ ჩვენი რაიმე ზრდადი ინტერვალი k იცვლება l-მდე არაუარყოფითი რიცხვებისთვის. $k < l$ არის $-k$.

§ 5. მარტინგალის თვისება სიმეტრიული შემთხვევითი ხეტიალისთვის .

იმის დასანახავად , რომ შემთხვევითი ხეტიალი არის მარტინგალი , ჩვენ ვირჩევთ არაუარყოფით რიცხვებს $k < l$ და ვითვლით

$$E[M_l|\mathcal{F}_k] = E[(M_l - M_k) - M_k|\mathcal{F}_k] =$$

$$= E[M_l - M_k|\mathcal{F}_k] + E[M_k|\mathcal{F}_k] =$$

$$= E[M_l - M_k|\mathcal{F}_k] + M_k =$$

$$= E[M_l - M_k] + M_k = M_k \,.$$

აქ ჩვენ ვიყენებთ აღნიშვნას $E[\dots|\mathcal{F}_k]$ პირობთი მათემატიკური ლოდინის , რომელიც ეყრდნობა k დრომდე არსებულ ინფორმაციას , რომელიც ამ შემთხვევაში არის k პირველი აგდების შედეგი . მეორე ტოლობა არის პირობითი მათემატიკური ლოდინის წრფივობის შედეგი. მესამე ტოლობა არის შედეგი იმისა , რომ M_k დამოკიდებულია პირველ k აგდებაზე . (ეს არის $\mathcal{F}_k$- ზომადი , სადაც $\mathcal{F}_k$ არის σ- ალგებრა , რომელიც შეესაბამება პირველ k მომენტის შედეგს) . მეოთხე თანასწორომა მოსდევს დამოუკიდებლად .

§ 6. სიმეტრიული შემთხვევითი ხეტიალის კვადრატული ვარიაცია .

საბოლოოდ ჩვენ განვიხილავთ სიმეტრიული შემთხვევითი ხეტიალის კვადრატულ ვარიაციას . კვადრატული ვარიაცია k მომენტამდე არის განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$[M, M]_k = \sum_{j=1}^{k} \left(M_j - M_{j-1}\right)^2 = k \,.$$

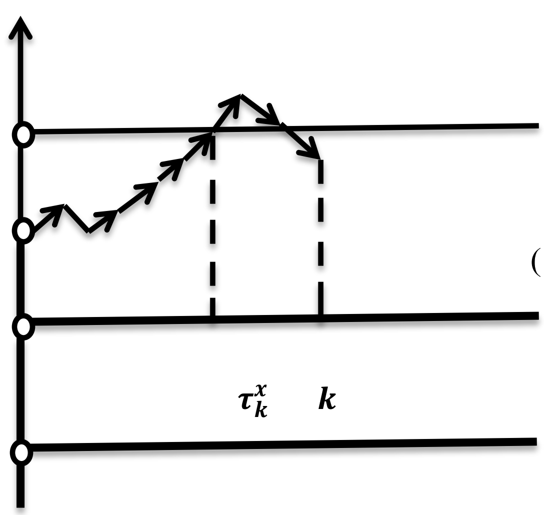
გავითვალისწინოთ , რომ ის გამოთვლილია თანდათან . კვადრატული ვარიაცია k მომენტამდე გამოითვლება ყველა ნაზრდის $M_j - M_{j-1}$ ტრაექტორიების გასწვრივ .

(ისინი არიან ტოლი 1 ან -1 , რაც ტრაექტორიაზეა დამოკიდებული) , შემდეგ კვადრატში აჰყავთ ეს ნაზრდები და აჯამებენ მათ . ვინაიდან $(M_j - M_{j-1})^2$=1 , იმის მიხედვით $M_j - M_{j-1}$ არის თუ არა 1 ან -1 , ჯამი ტოლია

$$\sum_{j=1}^{k} 1 = k\,.$$

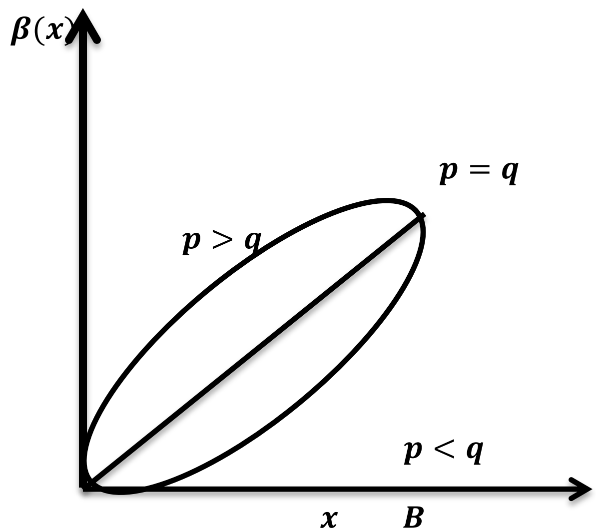
ჩვენ შევნიშნავთ , რომ $[M,M]_k$ იგივეა რაც $Var(M_k)$ (ვიღებთ $k_{i+1} = k$ და $k_i = 0$) მაგრამ გათვლა ამ ორი სიდიდის სავსებით განსხვავებულია . $Var\,(M_k)$ გამოთვლის გზა მთლიანად თეორიულია , მათი ალბათობების გათვალისწინებით . თუ შემთხვევითი ხეტიალი არ იყო სიმეტრიული (ე.ი. p იყო განსხვავებული q- სგან) , ეს კი მას შემდეგ , რაც გვაქვს $Var\,(M_k)$. შეთანხმების თანახმად $[M,M]_k$ გამოთვლილია ერთი გზის გასწვრივ და ალბათობების წინა და შემდგომი ნაბიჯები არ შევა გამოთვლებში . შემთხვევითი ხეტიალის ვარიაციის გამოთვლა შეიძლება მხოლოდ თეორიულად , იმიტომ რომ ის მოითხოვს საშუალოდ მეტ გზებს , გაცნობიერებლად და გაუცნობიერებლად. თუმცა , აღნისნული შედეგის მონცემებიდან შეიძლება გამოვთვალოთ გაცნობიერებული გზის გასწვრივ კვადრატული ფუნქციები საკმაოდ ცალსახად . შემთხვევიტი ხეტიალისთვის არის გარკვეულწილად უჩვეულო ფუნქცია , რომ $[M,M]_k$ არ არის დამოკიდებული კონკრეტულად არჩეულ გზებზე , რომლის გასწვრივ ის არის გამოთვლადი .

§ 7. გრაფიკები.



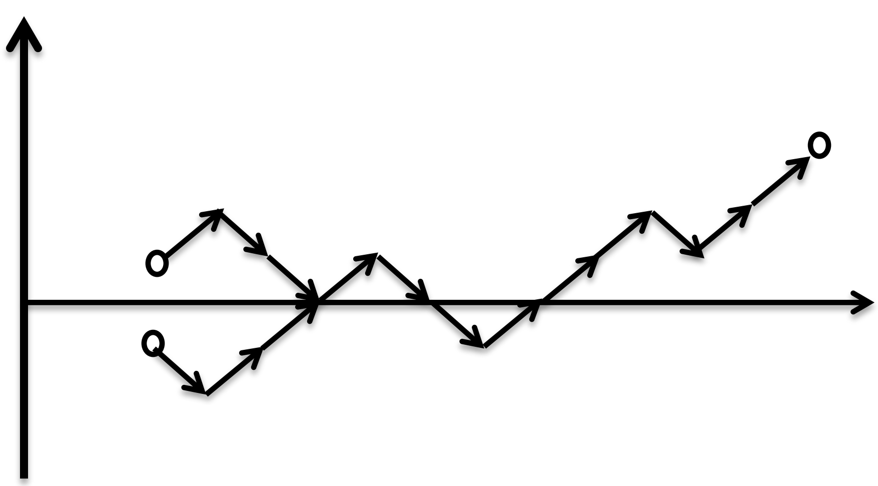
(ნახაზი 1.)

B_k^x სიმრავლის ტრაექტორიის მაგალითი .

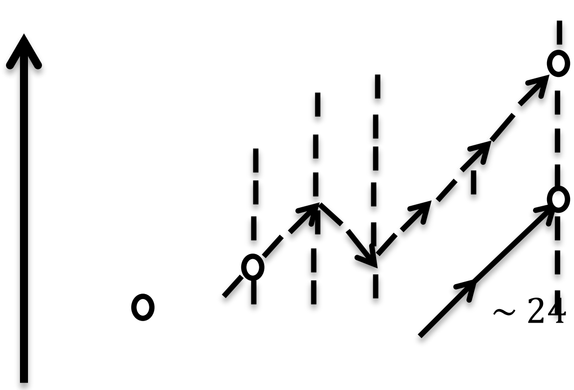


(ნახაზი 2.)

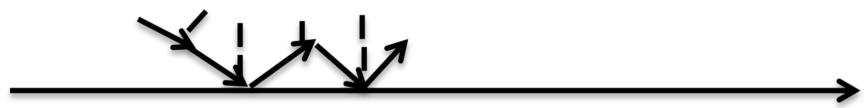
$\boldsymbol{\beta(x)}$**-** ალბათობა . როცა ნაწილაკი გამოდის x-წერტილიდან , ის უფრო სწრაფად მიისწრაფის B წერტილისკენ , ვიდრე 0 წერტილისკენ .

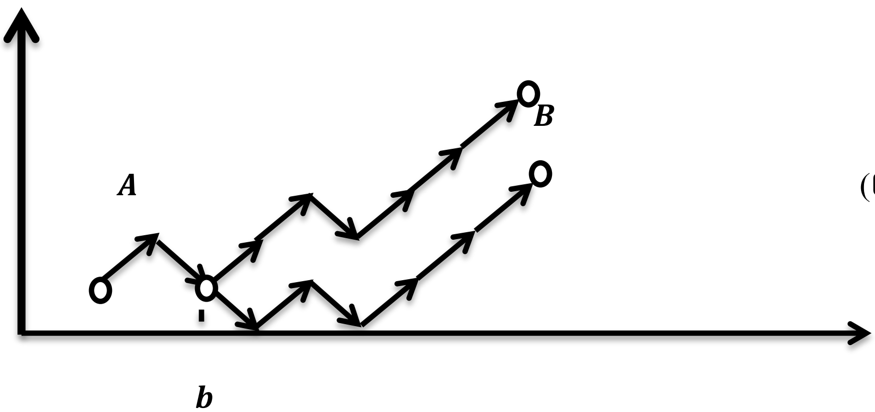


(ნახაზი 3.)

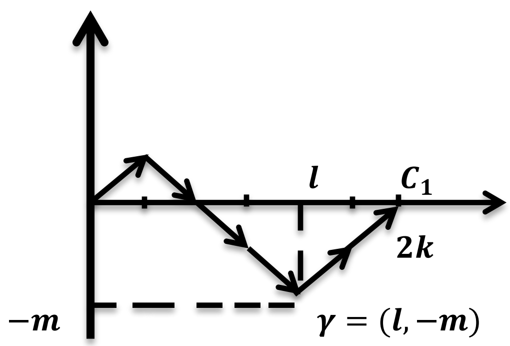


(ნახაზი 4.)

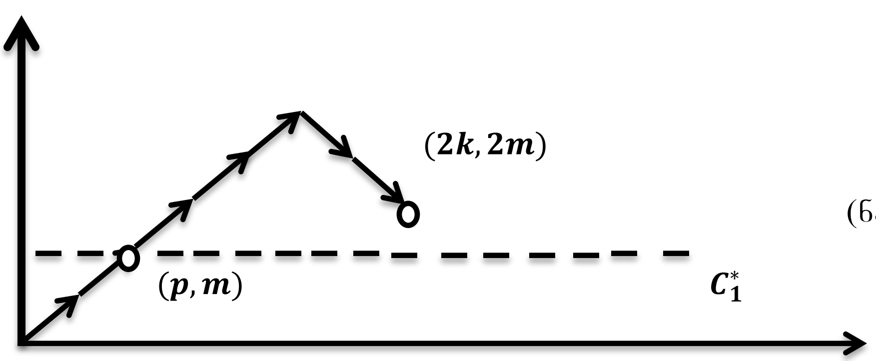




(ნახაზი 5.)



(ნახაზი 6.)



(ნახაზი 7.)

გამოყენებული ლიტერატურა .

1. STEVEN E . Shreve Stochastic Calculus for Finance || . Continuous – Time Models . Springer 2004.
2. I.KARATZAS .S . E . SHREVE. , Brownian Motion and Stochastic Calculus . Springer 1998.
3. А . Н. ЩИРЯЕВ. Вероятность-1. Москва . Изд. МЦНМО М . 2004.