



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

საბაკალავრო ნაშრომი

შეშფოთებათა წრფივი დინამიკა წანაცვლებით დინებებში

სტუდენტი: ელენე მილიუკოვი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის
ფიზიკის დეპარტამენტი, პლაზმის ფიზიკის ქვემომართულება

საბაკალავრო ნაშრომის ხელმძღვანელი:

გიორგი მამაცაშვილი

ფიზ.-მათ. მეცნ. კანდიდატი, დოქტორი (PhD),
თსუ, ზ.ს.მ.ფ., ფიზიკის დეპარტამენტი,
პლაზმის ფიზიკის ქვემომართულების
ასისტენტ-პროფესორი

თბილისი 2014

სარჩევი

ანოტაცია	3
შესავალი და ლიტერატურის მიმოხილვა	4
მეთოდები	8
კვლევის შედეგები და მათი განხილვა	12
დასკვნა	17
გამოყენებული ლიტერატურა	18

ანოტაცია

ნაშრომში განხილულია შემფოთებების წრფივი დინამიკა მუდმივი წანაცვლების მქონე დინებაში, რომელიც მდგრადია მოდალური თეორიის თანახმად. ასეთი ტიპის დინებები ხშირად გვხვდება ლაბორატორიაში, ატმოსფეროსა და ოკეანეებში, ასევე სხვადასხვა ასტროფიზიკურ ობიექტებში, ამიტომ მათი მდგრადობის შესწავლა ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა ასეთი დინებების ზოგადი (არაწრფივი) დინამიკისა და ევოლუციის გასაგებად. ჰიდროდინამიკური განტოლებების გაწრფივებით წონასწორული დინების მიმართ მიღებულია ევოლუციის განტოლებები მცირე შემფოთებებისთვის. მათი დინამიკის შესასწავლად გამოყენებულია არამოდალური მიდგომის კერძო სახე -- კელვინის მოდების ფორმალიზმი. რიცხვითი ინტეგრების საშუალებით შესწავლილია სივრცული ფურიე ჰარმონიკების (კელვინის მოდების) ევოლუცია დროში და ნაჩვენებია, რომ ისინი განიცდიან ალგებრულ ტრანზიენტულ ზრდას (ტრანზიენტული არამდგრადობა). გამოკვლეულია ასეთი ტრანზიენტული გაძლიერების დამოკიდებულება ჰარმონიკის ორ (დინების გასწვრივ და ვერტიკალურ) ტალღურ რიცხვზე. განხილულია მიღებული შედეგების შესაძლო მნიშვნელობა ლაბორატორიული და ბუნებაში არსებული ასეთი ტიპის პლაზმური დინებებისთვის, კერძოდ, თუ როგორ შეუძლია ამ ტრანზიენტულ არამდგრადობას გამოიწვიოს ტურბულენტური გადასვლა და, საკუთრივ, ხელი შეუწყოს სუბკრიტიკული ტურბულენტობის შენარჩუნებას დინებაში.

Linear dynamics of perturbations in shear flows

Elene Miliukovi

Abstract

Linear dynamics of perturbations in a constant shear flow of incompressible fluid, which is spectrally/modally stable, is investigated. This type of flow is ubiquitous in laboratory, in the atmosphere and ocean as well as in a variety of astrophysical objects, so their stability analysis is of paramount importance in understanding general (nonlinear) dynamics and evolution of these flows. By linearizing basic equations of hydrodynamics, we obtain evolution equations for small perturbations. For the analysis, we employ a special type of nonmodal approach – Kelvin mode formalism. Then, using numerical integration, we analyze time-evolution of spatial Fourier harmonics (Kelvin modes) and show that they undergo algebraic transient growth (transient instability). We characterize this transient amplification as a function of two (vertical and streamwise) wavenumbers of harmonics. We discuss implications of our results for laboratory and astrophysical plasma flows, in particular, the role of the transient instability in the onset and maintenance of subcritical turbulence in these flows.

1. შესავალი და ლიტერატურის მიმოხილვა

არაერთგვაროვანი/წანაცვლებითი დინებები ხშირად გვხვდება ლაბორატორიულ თუ საინჟინრო დანადგარებში (მაგ., დინებები მილებში, ტურბინებში, ა.შ.), დედამიწის ატმოსფეროსა თუ ოკეანეში, სხვა პლანეტების ატმოსფეროში, ასტროფიზიკურ ობიექტებში (მაგ., დიფერენციალურად მბრუნავი ასტროფიზიკური (გალაქტიკური, აკრეციული, პროტოპლანეტარული) დისკები, ვარსკვლავთა შიდა ნაწილი, ვარსკვლავური ქარი, და ა.შ.) და უმეტესწილად განსაზღვრავს ამ სისტემების დინამიკას. იმის გამო, რომ წანაცვლებითი პლაზმური დინებები ასე გავრცელებულია ბუნებაში, მათი დინამიკის და ევოლუციის ისეთი კომპლექსური და რთული ასპექტების შესწავლა და გააზრება, როგორიცაა წრფივი და არაწრფივი მდგრადობა, ტურბულენტობაში გადასვლა და სხვადასხვა ტურბულენტური გადატანითი მოვლენები, უკვე თითქმის საუკუნეა, რაც წარმოადგენს უწყვეტი გარემოს მექანიკის (ჰიდროდინამიკის) კვლევის საგანს. მნიშვნელოვანი ძალისხმევა კეთდებოდა ათწლეულების მანძილზე სხვადასხვა მონათესავე დარგში - მაგნეტოჰიდროდინამიკა, სტატისტიკური ფიზიკა, ფიზიკური კინეტიკა, მეტეოროლოგია, გეოფიზიკა და ასტროფიზიკა - წანაცვლებითი დინებების დინამიკური ბუნების შესასწავლად სხვადასხვა პირობებში. ასეთი კოლექტიური ძალისხმევის შედეგად მოხდა წანაცვლებით დინებებში მიმდინარე მრავალფეროვანი ფიზიკური მოვლენების შესახებ ჩვენი თანამედროვე და ზოგადი ცოდნის ჩამოყალიბება.

ამ ნაშრომში შევისწავლით შემფოთებათა ზრდის ფიზიკურ მექანიზმებს წანაცვლებითი დინებების ისეთ კლასში, რომლებიც მდგრადია კლასიკური მოდალური თეორიის თანახმად. ასეთი დინებები, რომელთა სიჩქარის პროფილი არის გლუვი გარდატეხის წერტილების გარეშე (იხ. ქვემოთ), იპყრობს განსაკუთრებულ ინტერესს და ყურადღებას იმიტომ, რომ რეალურად უმრავლესობა ასტროფიზიკური თუ გეოფიზიკური, ასევე საინჟინრო თუ ლაბორატორიული დინებებისა ასეთი ტიპისაა - ისინი ავლენენ ინტენსიურ ტურბულენტობას და ტურბულენტურ გადატანით მოვლენებს მიუხედავად მათი აშკარა წრფივი მდგრადობისა კლასიკური სპექტრალური/მოდალური ანალიზის (სადაც ხდება შემფოთებების ფურიე გაშლა დროის მიმართ) მიხედვით. მაგალითად, ტურბულენტობა ატმოსფერულ ნაკადებში იწვევს ჰაერის სიმკვრივის ფლუქტუაციებს და შედეგად ატმოსფერულ სცინტილაციას. ერთი-ერთი მნიშვნელოვანი მოვლენა ასტრონომიაში - ასტროფიზიკური დისკის ნივთიერების აკრეცია ცენტრალურ ობიექტზე,

რასაც ახლავს ძლიერი გამოსხივება - იმართება სწორედ მაგნეტოჰიდროდინამიკური ტურბულენტობით დისკური პლაზმის წანაცვლებით დინებაში, რომელიც წარმოადგენს ჰიდროდინამიკური გაგებით სპექტრალურად/მოდალურად მდგრად კეპლერულ ბრუნვას (იხ. Balbus 2003, Armitage 2011). სპექტრალურად/მოდალურად არამდგრადი მოდეების არარსებობის გამო, ასეთ დინებებში ტრანზიენტული დინამიური პროცესები ხდება მნიშვნელოვანი, რაც საბოლოო ჯამში იწვევს ტურბულენტობის განვითარებას, რომლის თვისებებიც და შენარჩუნების მექანიზმებიც (არაწრფივი კასკადები) ფუნდამენტურად განსხვავდება ტურბულენტობისგან სპექტრალურად არამდგრად დინებებში, რაც შედარებით უკეთესადაა შესწავლილი. ასეთი განსხვავება, პირველ რიგში, გამოწვეულია სიჩქარის წანაცვლებით, რაც ძირითადი მიზეზია ასეთ დინებებში ტრანზიენტული (სასრულ-დროითი მასშტაბის მქონე) მოვლენებისა. მეორე მხრივ, ზემოხსენებული მაგალითებიდან ჩანს, რომ ტურბულენტობას შეიძლება ჰქონდეს მნიშვნელოვანი ექსპერიმენტული თუ დაკვირვებითი გამოვლენა და, რადგანაც ასეთი დინებები ფართოდაა გავრცელებული ბუნებაში, იმ ფიზიკური მექანიზმების დადგენა/კვლევა, რაც საფუძვლად უდევს შემფოთებების ტრანზიენტულ ზრდას და ტურბულენტობაში გადასვლას სპექტრალურად მდგრად გლუვ წანაცვლებით დინებებში და ასევე სხვადასხვა ფაქტორების (სტრათიფიკაცია, ბრუნვა, კუმშვა-დობა, ა.შ.) ზეგავლენა დღესდღეობით წარმოადგენს თანამედროვე კვლევის ინტერესის საგანს. მნიშვნელოვანი პროგრესი ამ მხრივ მოხდა გასული საუკუნის 90-იან წლებში, როცა მათემატიკურად იყო ნაჩვენები სპექტრალურად მდგრადი წანაცვლებითი დინებების არაორთოგონალური ბუნება (მაგ. Reddy et al. 1993), რამაც ინტერესი გააღვივა შემდგომი კვლევებისთვის ამ მიმართულებით.

ტრადიციულად, მოდალური/სპექტრალური მიდგომა, რომელიც მდგომარეობს შემფოთებათა სპექტრალურ გაშლაში დროის მიხედვით, გამოიყენება ჰიდროდინამიკასა და პლაზმის ფიზიკაში, როგორც მთავარი იარაღი სივრცულად არაერთგვაროვანი სიჩქარის პროფილის/წანაცვლებითი დინებების მდგრადობის შესასწავლად. ცნობილია, რომ გლუვი წანაცვლებითი დინებები გარდატეხის წერტილის გარეშე არის სპექტრალურად მდგრადი რეილეის (Rayleigh) კრიტერიუმის მიხედვით, ანუ შემფოთებები არ იზრდება ასიმპტოტურად დიდ დროებზე ნებისმიერი რეინოლდსის (Reynolds) რიცხვისთვის (Drazin & Reid 1981). თუმცა, ექსპერიმენტები და ასტროფიზიკურ და გეოფიზიკურ დინებებზე დაკვირვებები ადასტურებს, რომ მიუხედავად დინების

ასეთი მოდალურად მდგრადი პროფილებისა, შემფოთებები შეიძლება მაინც საკმაოდ გაიზარდოს სასრული დროის განმავლობაში და გამოიწვიოს დინების გადასვლა ტურბულენტობაში. მოდალურად/სპექტრალურად მდგრადი დინებების ასეთი, ერთი შეხედვით, უცნაური ქცევის ახსნის აუცილებლობამ უბიძგა ჰიდროდინამიკურ საზოგადოებას შეეცვალა კვლევის პარადიგმა 90-იან წლებში და შედეგად შეიქმნა ახალი მიდგომა, რომელსაც ეწოდა არამოდალური ანალიზი (Trefethen et al. 1993). ასეთი მიდგომის წყალობით მნიშვნელოვანი პროგრესი იქნა მიღწეული ამ ბოლო ორი ათწლეულის განმავლობაში გლუვ წანაცვლებით დინებებში შემოთებების წრფივი/არაწრფივი დინამიკისა და ტურბულენტობის მოვლენის გააზრებაში. პირველ რიგში, როგორც ზემოთ აღინიშნა, ნაჩვენები იქნა, რომ ოპერატორები, რომლებიც არსებობს გლუვი წანაცვლებითი დინებების მდგრადობის წრფივ მოდალურ ანალიზში, არის არათვითშეუღლებული წანაცვლების გამო და, აქედან გამომდინარე, შესაბამისი საკუთარი ფუნქციები -- არაორთოგონალური და ძლიერ ინტერფერირებადი. მოდალური/სპექტრალური მიდგომის ფარგლებში ვერ ხერხდება ასეთი ინტერფერენციის გათვალისწინება და, გამომდინარე აქედან, მხედველობის მიღმა რჩება ამით გამოწვეული ტრანზიენტული მოვლენები, რომლებიც მიმდინარეობენ წანაცვლებით დინებებში დროის სასრული ინტერვალის განმავლობაში. მეორეს მხრივ, არამოდალური მიდგომა საშუალებას იძლევა კორექტულად გავითვალისწინოთ ასეთი არაორთოგონალურობის გავლენა, და შედეგად, პირველად გამოვლენილ და დეტალურად აღწერილ იქნა ორი ახალი ენერგიის მიმოცვლითი პროცესი/არხი - შემფოთებათა მოდების ტრანზიენტული ზრდა და ურთიერთბმა - რომლებგანპირობებულია დინების წანაცვლებით. პირველი ენერგეტიკული არხი მდგომარეობს ენერგიის მიმოცვლაში ძირითად დინებასა და შემფოთებებს შორის და აღწერს წრფივ ტრანზიენტულ ზრდას, რომელმაც შეიძლება მიაღწიოს მნიშვნელოვან სიდიდეს სასრული დროის განმავლობაში (მაგ., Lominadze et al. 1988, Reddy & Henningson 1993, Farrell & Ioannou 1993, Schmid & Henningson 2001, Chagelishvili et al. 2003, Yecko 2004). ამის საფუძველზე ნავარაუდევია იყო, რომ ტრანზიენტულ ზრდას შეუძლია გამოიწვიოს და ასევე ენერგეტიკულად შეინარჩუნოს ტურბულენტობა (Chagelishvili et al. 2002, Horton et al. 2010).

ამ ნაშრომში ჩვენ შევისწავლით შემფოთებების წრფივ დინამიკას წანაცვლებით დინებებში. კერძოდ, ჩვენ განვიხილავთ საინჟინრო დანადგარებში და ბუნებაში მეტად გავრცელებულ კუეტეს (Couette) დინებას და დეტალურად შევისწავლით ასეთ დინებებში

სამგანზომილებიანი შემფოთებების ევოლუციას. კუეტეს დინება ხასიათდება სიჩქარის პროფილის მუდმივი წანაცვლებით და თავისი ელევანტურად მარტივი და ამავე დროს მნიშვნელოვანი კონფიგურაციის გამო საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ წანაცვლებით გამოწვეული შემფოთებათა ტრანზიენტული დინამიკა. ანალიზისთვის გამოვიყენებთ არამოდალური მიდგომის კერძო სახეს -- კელვინის მოდების ფორმალიზმს (Thompson 1887) -- რომელიც ფართოდ გამოიყენება მუდმივ წანაცვლებიან დინებებში შემფოთებების დროში ევოლუციის შესასწავლად (იხ. მაგ., Goldreich & Lynden-Bell 1965, Chagelishvili et al. 2003, Mamatsashvili & Chagelishvili 2007) და დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ინტეგრირების მეთოდებს წრფივი ჰიდროდინამიკური განტოლებების ამოსახსნელად. ჩვენი ნაშრომი ეყრდნობა შრომას Bakas et al. (2001) სადაც განხილულია მსგავსი დინება, ოღონდ სიმკვრივის კვვერტიკალური სტრათიფიკაციით (მეტეოროლოგიურ კონტექსტში) და გამოკვლეულია მასში სივრცული ფურიე ჰარმონიკების (კელვინის მოდების) ევოლუცია სხვადასხვა ტალღური რიცხვებისთვის და შედარებულია ენერგიის გაძლიერების ფაქტორები. ასევე გამოთვლილი იყო ოპტიმალური (ე.ი., ფიქსირებული ტალღური რიცხვებისთვის, დინამიური დროის განმავლობაში მაქსიმალურად ზრდადი) ჰარმონიკები, რომლებიც არაწრფივ რეჟიმში განსაზღვრავს დინებაში გაჩენილ კოჰერენტულ სტრუქტურების ფორმირებას. ამ ნაშრომში, ჩვენ ჩავატარებთ მსგავს ანალიზს შემფოთებების ფურიე ჰარმონიკების ევოლუციის ჩვენს მიერ შერჩეული დინების კონფიგურაციისთვის და ეს წრფივი ანალიზი იქნება ბაზისური არაწრფივი დინამიკის (ტურბულენტობის) შემდგომი კვლევისა.

ამრიგად, ამ ნაშრომის გეგმა შემდეგია: მე-2 თავში განვიხილავთ წონასწორულ კონფიგურაციას და გამოვიყვანთ მცირე შემფოთებების დინამიკის აღმწერ წრფივ განტოლებებს. მე-3 თავში აღვწერთ შემფოთებების სივრცული ჰარმონიკების დროში ევოლუციას და გამოვთვლით მათ ზრდის ფაქტორს პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის და ბოლოს, მე-4 თავში შევაჯამებთ მიღებულ შედეგებს და განვიხილავთ მათ მნიშვნელობას დინების ტურბულენტობისთვის.

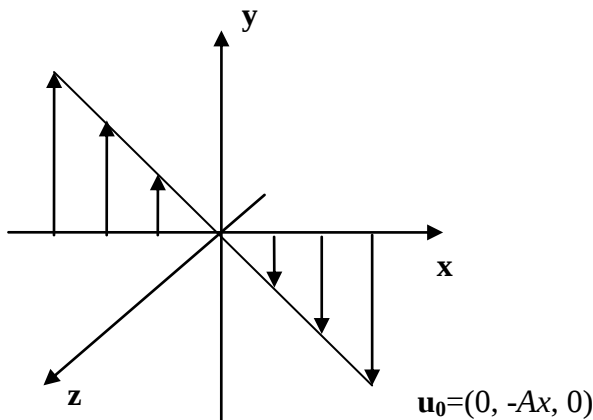
2. მეთოდები

უკუმშვადი სითხის მოძრაობა აღიწერება ნავიე–სტოქსის დინამიური განტოლებით (იხ. Landau & Lifshitz 1959)

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}\right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

სადაც $\vec{v}$ სითხის სიჩქარეა, ρ სიმკვრივეა, p წნევა და ν კინემატიკური სიბლანტის კოეფიციენტი. განტოლება (2) წარმოადგენს უკუმშვდობის პირობას.



ნახ. 1. წონასწორული ძირითადი სამგანზომილებიანი დინების სქემატური ნახაზი. დინება მიმართულია y -ღერძის გასწვრივ და ხასიათდება მუდმივი $A>0$ წანაცვლებით x -მიმართულებით.

წონასწორული მდგომარეობა, რომლის მდგრადობასაც შევისწავლით ამ ნაშრომში, წარმოადგენს დინებას y -მიმართულებით, რომელსაც გააჩნია მუდმივი წანაცვლება განივი x -მიმართულებით (ნახ. 1):

$$\vec{v}_0 = (0, -Ax, 0) \quad (3)$$

სადაც $A>0$ არის წანაცვლების პარამეტრი. სითხის სიმკვრივე $\rho_0 = \text{const}$ და წნევა $p_0 = \text{const}$ ერთგვაროვანია კოორდინატების მიხედვით. აღვნიშნავთ, რომ ასეთი სახის დინებები მუდმივი წანაცვლებით წარმოადგენს არაერთგვაროვანი დინებების მნიშვნელოვან კლასს, რადგან იგი ძალიან ხშირად გვხვდება, როგორც საინჟინრო დანადგარებში, ასევე ბუნებაში. მაგალითად, ბრტყელი კუეტის (Couette) დინება ლაბორატორიებში, ასტროფიზიკური პლაზმური დისკების დინებები ცნობილ ლოკალურ მიახლოებაში (Goldreich & Lynden-Bell 1965), რაც ფართოდ შეისწავლება დღესდღეობით (მაგ., Hawley et al. 1995, Mamatsashvili & Chagelishvili 2007, Bodo et al. 2005, Heinemann & Papaloizou 2009); ასეთი დინებები ასევე განიხილება მეტეოროლოგიაში (e.g., Bakas et al. 2001, Vanneste & Yavneh 2004, Bakas & Farrell 2009, Mamatsashvili et al. 2010). გარდა ამისა,

ნებისმიერი სივრცულად არაერთგვაროვანი დინება შეიძლება მიახლოებით წარმოვადგინოთ (ტეილორის გაშლის საშუალებით) როგორც მუდმივი წანაცვლების დინება საკმარისად მცირე მასშტაბებზე, რომელიც ამავე დროს დიდია დინამიკის მახასიათებელ სივრცულ მასშტაბებთან შედარებით. მუდმივი წანაცვლების დინების ერთ-ერთი უპირატესობაა ის, რომ მისი ელევანტურად მარტივი კონფიგურაცია საშუალებას გვაძლევს ადვილად გავანალიზოთ დინების წანაცვლებით გამოწვეული ეფექტების გავლენა შემფოთებათა დინამიკაზე. ჩვენ გვანტერესებს სწორედ ასეთი ეფექტები, ამიტომ ვთვლით, რომ დინება შემოუსაზღვრელია, ე.ი., უგულებელვყოფთ საზღვრების გავლენას.

ჩვენი ამოცანაა ზემოთ აღწერილი წონასწორული მდგომარეობის მდგრადობის საკითხის შესწავლა. ამისათვის, როგორც ეს ჩვეულებრივ მიღებულია ჰიდროდინამიკაში (Drazin & Reid 1981), განვიხილოთ სიჩქარის და წნევის მცირე გადახრები/შემფოთებები (აღნიშნულია შტრიხებით) ძირითადი დინების გარშემო,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'(\vec{r}, t), \quad p = p_0 + p'(\vec{r}, t) \quad (4)$$

(სითხის უკუმშვადობის და არასტრათიფიკაციის გამო, არ ხდება სიმკვრივის შემფოთება). შევიტანოთ (4) გამოსახულებები (1) და (2) განტოლებებში და გავაწრფივოთ. შედეგად მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს, რომლებიც განსაზღვრავენ შემფოთებების ევოლუციას

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v}' + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p' + \nu \Delta \vec{v}'$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0$$

ან კომპონენტებად დაშლის შემდეგ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - Ax \frac{\partial}{\partial y}\right) v'_x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta v'_x \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - Ax \frac{\partial}{\partial y}\right) v'_y = A v'_x - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v'_y \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - Ax \frac{\partial}{\partial y}\right) v'_z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta v'_z \quad (7)$$

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

ამ განტოლებების სტრუქტურა მიგვანიშნებს, რომ შემფოთებები შეიძლება გაიშალოს წანაცვლებით ბრტყელ ტალღებად, ანუ სივრცულ ფურიე ჰარმონიკებად (სფჰ), რომელთა ამპლიტუდა და ფაზა იცვლება დროის მიხედვით:

$$\begin{aligned}
v'_x(\vec{r}, t) &= u_x(t)e^{i k_x(t)x + i k_y y + i k_z z} \\
v'_y(\vec{r}, t) &= u_y(t)e^{i k_x(t)x + i k_y y + i k_z z} \\
v'_z(\vec{r}, t) &= u_z(t)e^{i k_x(t)x + i k_y y + i k_z z} \\
P(\vec{r}, t) &= P(t)e^{i k_x(t)x + i k_y y + i k_z z}
\end{aligned} \tag{9}$$

სადაც $p/\rho_0 = P$

$u_x(t)$, $u_y(t)$, $u_z(t)$ და $P(t)$ არის სფ3-ს შესაბამისი დროზე დამოკიდებული ამპლიტუდები. დინების გასწვრივი k_y და ვერტიკალური k_z ტალღური რიცხვები უცვლელია, ხოლო განივი ტალღური რიცხვი $k_x(t) = k_x(0) + Ak_y t$ წრფივად იზრდება დროის მიხედვით თუ ჰარმონიკა არის არა-აქსისიმეტრიული ($k_y \neq 0$), რაც გამოწვეულია ძირითადი დინების მიერ სფ3-ის წანაცვლებით; ანუ განივი ტალღური რიცხვი დრეიფობს ტალღურ რიცხვთა $\mathbf{k}$ -სივრცეში. სხვა სიტყვებით, ნებისმიერ სფ3, რომლისთვისაც თავიდან $k_x(0)/k_y < 0$, დროის განმავლობაში შემოტრიალდება და ხდება $k_x(t)/k_y > 0$. აქვე აღვნიშნავთ, რომ ასეთი დროზე დამოკიდებული ტალღური რიცხვები არ გვხვდება მდგრადობის კლასიკურ ამოცანებში (Drazin & Reid 1981), რადგან იქ განიხილება მოდალური მიდგომა და არა საწყისპირობიანი ამოცანები, ამ უკანასკნელთათვის კი სწორედ არამოდალური მიდგომის გამოყენებაა აუცილებელი. შემფოთებათა წარმოდგენის მეთოდი ასეთ წანაცვლებით ტალღებად (9) პირველად შემოტანილი იყო ლორდ კელვინის მიერ (Thompson 1887) უკუმშვად ჰიდროდინამიკურ დინებაში ტრანზიენტულად ზრდადი ამონახსნების დასახასიათებლად. იგი წარმოადგენს არამოდალური მიდგომის კერძო სახეს და ფართოდ გამოიყენება დღესდღეობით სხვადასხვა კონტექსტის მუდმივწანაცვლებიანი დინებების მდგრადობის კვლევაში (იხ. მაგ. Chagelishvili et al. 2003, Tevzadze et al. 2003, 2008, Mamatsashvili & Chagelishvili 2007, Heinemann & Papaloizou 2009). როგორც ამას ქვემოთ დავინახავთ, ეს მეთოდი საშუალებას გვაძლევს მივყვეთ შემფოთებათა დროში ევოლუციის მთელ მსვლელობას და “დავიჭიროთ” ის ტრანზიენტული მოვლენები, რომლებიც გამოწვეულია დინების წანაცვლებით. ჩვენ გვაინტერესებს სწორედ ასეთი სრული ევოლუცია დროის მიხედვით. ქვემოთ დავინახავთ, რომ საინტერესო დინამიურ მოვლენებს აქვს ადგილი $k_x(t) \approx 0$ -ის მახლობლობაში.

ჩავსვამთ რა წარმოდგენას (9), განტოლებებში (5–8), მივიღებთ პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც განსაზღვრავს სფ3-ის ამპლიტუდების ევოლუციას დროში

$$\frac{du_x}{dt} = -ik_x P - \nu u_x k^2$$

$$\frac{du_y}{dt} = A u_x - ik_y P - \nu u_y k^2$$

$$\frac{du_z}{dt} = -ik_z P - \nu u_z k^2$$

$$k_x u_x + k_y u_y + k_z u_z = 0$$

ამ განტოლებებიდან წნევის გამორიცხვით და შემდეგ უგანზომილებო ცვლადებზე გადასვლით:

$$h = \frac{U_0}{A}, \quad Re = \frac{U_0 h}{\nu} = \frac{U_0^2}{A \nu}, \quad At \rightarrow t, \quad kh \rightarrow k, \quad \frac{\vec{u}}{U_0} \rightarrow \vec{u}$$

სადაც U_0 არის მუდმივი სიჩქარე, რომელზეც ვახდენთ ნორმირება და Re არის რეინოლდსის რიცხვი, საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას სიჩქარის ამპლიტუდებისთვის:

$$\frac{du_x}{dt} = -\frac{2k_x k_y}{k^2} u_x - \frac{k^2}{Re} u_x \quad (10)$$

$$\frac{du_y}{dt} = u_x \left(1 - \frac{2k_y^2}{k^2}\right) - \frac{k^2}{Re} u_y \quad (11)$$

ქვემოთ დავახასიათებთ შეშფოთებების ტრანზიენტულ ზრდას, მისი ენერგიის საშუალებით, რომელიც თითოეული სფ3-თვის წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას

$$E = \frac{|u_x|^2 + |u_y|^2 + |u_z|^2}{2}$$

ეს გამოსახულება ფაქტობრივად არის კინეტიკური ენერგიის სიმკვრივე სპექტრალურ $\mathbf{k}$ -სივრცეში. მისი ევოლუცია აღიწერება განტოლებით.

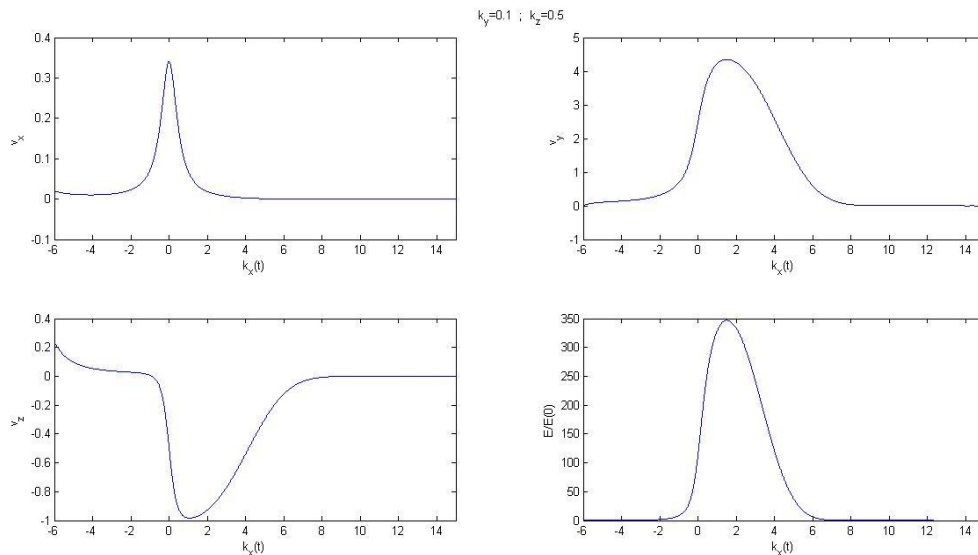
$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} (u_x u_y^* + u_x^* u_y) - 2k^2 \frac{E}{Re}$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში პირველი წევრი წარმოადგენს რეინოლდსის დაჭიმულობის ტენზორს (Reynolds stress) და აღწერს ძირითად დინებას და შემფოთებებს შორის ენერგიის მიმოცვლას, ხოლო მეორე წევრი აღწერს ენერგიის დისიპაციას სიბლანტის გამო.

3. კვლევის შედეგები და მათი განხილვა

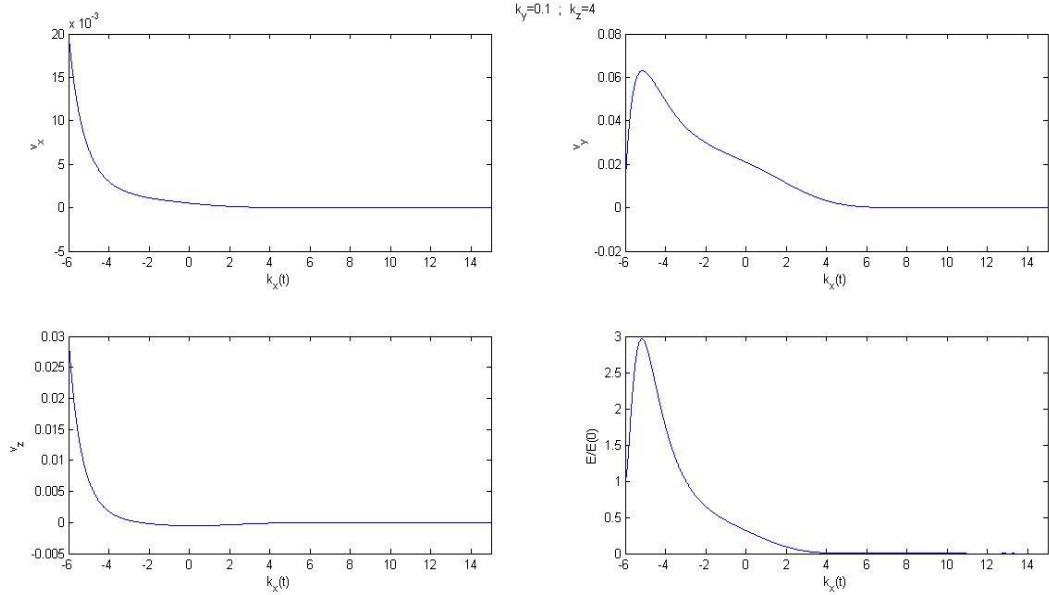
ჩვენი მიზანია სფ3 ამპლიტუდების და შესაბამისი ენერგიის ევოლუციის და გაძლიერების ეფექტურობის შესწავლა როგორც ტალღური რიცხვების ფუნქცია (რეინოლდსის რიცხვის ფიქსირებული მნიშვნელობისთვის, $Re = 400$). ამისათვის ვაინტეგრებთ ძირითად განტოლებებს (10) და (11) რიცხვითად სტანდარტული რუნგე-კუტას (Runge-Kutta) მეთოდის გამოყენებით, რომელიც იმპლემენტირებულია MATLAB პაკეტში (ode45 solver).

ნახაზებზე 2, 3, 4 და 5 წარმოდგენილია სიჩქარის კომპონენტების და საწყის მნიშვნელობაზე ნორმირებული ენერგიის ევოლუცია როგორც $k_x(t)$ -დროში ცვლადი ტალღური რიცხვის ფუნქცია, დინების გასწვრივი k_y და მართობული k_z ტალღური რიცხვების სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის. საწყის მომენტში ვიხილავთ მხოლოდ იმ ჰარმონიკებს, რომელთათვისაც $k_x(0) < 0$, რადგან მხოლოდ მათ შეუძლიათ ევოლუციის პროცესში განიცადონ მნიშვნელოვანი ტრანზიენტული ზრდა ძირითადი დინებიდან ენერგიის მიღების შედეგად. ჰარმონიკებს რომელთათვისაც $k_x(0) > 0$ თავიდანვე ააქვთ ისეთი ორიენტაცია, რომ უბრუნებენ თავიანთ ენერგიას დინებას, და როცა $k_x(t)$ ხდება დიდი დროის მიხედვით, ასევე დისიპაციის როლი მნიშვნელოვანი ხდება, რაც იწვევს ჰარმონიკების ენერგიის ჩახშობას. დასაწყისში, სანამ $k_x(t) \ll -1$, სიჩქარის კომპონენტები და ენერგია ნელა იზრდება ალგებრული კანონით. $k_x(t) \approx 0$ მიახლოებისას ყველა ეს სიდიდე განიცდის უფრო მეტ ტრანზიენტულ ზრდას დინებიდან ენერგიის ამოქაჩვის ხარჯზე. სამგანზომილებიანი შემფოთებების სფ3-ის ასეთი ტრანზიენტული გაძლიერების მექანიზმი კარგად არის ცნობილი ლიტერატურაში (იხ. მაგ. Bakas et al. 2001) -- იგი წარმოადგენს ორგანზომილებიანი შემფოთებების ($k_z = 0$) გაძლიერების *ორრის* (Orr)-ის მექანიზმის და აქსისიმეტრიული ($k_y = 0$) გრიგალური (roll) შემფოთებების

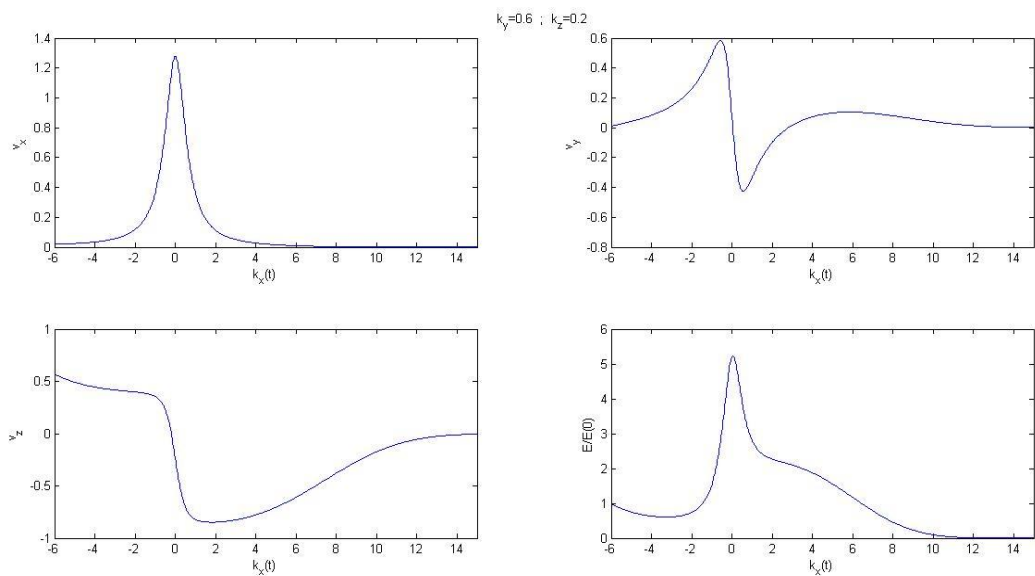


ნახ.2 სიჩქარის კომპონენტების და ნორმირებული ენერგიის ევოლუცია სფ3-თვის ტალღური რიცხვებით $k_x(0) = -6, k_y = 0.1, k_z = 0.5$. ეს სიდიდეები განიცდიან ტრანზიენტულ ზრდას ძირითადად $k_x(t) \approx 0$ -ის მახლობლობაში, სადაც ხდება დინებასა და ჰარმონიკას შორის ენერგიის ინტენსიური მიმოცვლა, და შემდეგ დისიპაციის გამო ნელ-ნელა მიილევინ.

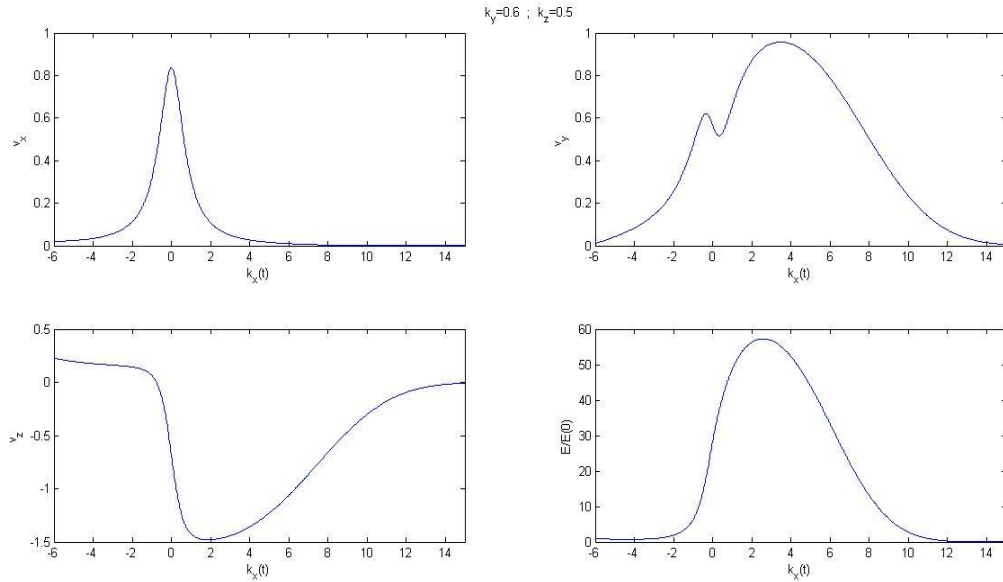
გაძლიერების ე.წ. roll- მექანიზმის (დინების წანაცვლების წყალობით, შემფოთებული სიჩქარის წანაცვლების გასწვრივი კომპონენტიდან დინების პარალელური სიჩქარის კომპონენტის წარმოქმნა, რომელიც დროში წრფივად იზრდება) კომბინაციას/სინერგიას. k_x -ს შემდგომი ზრდის შედეგად (როცა, პირობითად, $k_x(t) > 6$ და ასევე $k_y, k_z > 6$, ნახ 3) დისიპაცია ხდება მნიშვნელოვანი და იწვევს ჰარმონიკის ენერგიის ჩახშობას. მაგრამ ტურბულენტობაში გადასვლის თვალსაზრისით, დიდ დროებზე ენერგიის ჩახშობას არ ააქვს მნიშვნელობა. ჩვენი მიზანია, გავარკვეოთ რამდენად ახერხებს ჰარმონიკის ენერგია ზრდას დინამიური (წანაცვლების) დროის განმავლობაში. განმავლობაში, $k_x \approx 0$ -ს მახლობლობაში, რადგან ჰარმონიკების სწორედ ასეთი ზრდის შედეგად ერთვება არაწრფივობა და იწვევს ტურბულენტურ გადასვლას. ცხადია, რაც მნიშვნელოვანია, სამგანზომილებიანი ($k_z \neq 0$) შემფოთებების ჰარმონიკების ტრანზიენტული გაძლიერების ზემოთაღნიშნული მექანიზმი ერთნაირია ბლანტი და იდეალური სითხის შემთხვევებისთვის (Bakas et al. 2001), იმ განსხვავებით, რომ იდეალურ სითხეში დიდი დროებისთვის ($k_x(t) \gg k_y$) სიჩქარის u_y და u_z კომპონენტები, ტრანზიენტული გაძლიერების შემდეგ, აღწევენ სასრულ მნიშვნელობებს, ხოლო u_x კომპონენტი თავიდან იზრდება ძირითადი დინების ხარჯზე (სანამ $k_x(t)/k_y < 0$), ხოლო შემდეგ (როცა $k_x(t)/k_y > 0$)



ნახ. 3 სიჩქარის კომპონენტების და ნორმირებული ენერგიის ევოლუცია სფჰ-თვის ტალღური რიცხვებით $k_x(0) = -6, k_y = 0.1, k_z = 4$. ამ შემთხვევაში დისიპაცია მნიშვნელოვნად მთელი ევოლუციის დროის განმავლობაში შედარებით დიდი ვერტიკალური ტალღური რიცხვის გამო და შედეგად ჰარმონიკა უფრო ადრე იწყებს ჩახშობას, ვიდრე განიციდდა ზრდას $k_x \approx 0$ -ის მახლობლობაში.



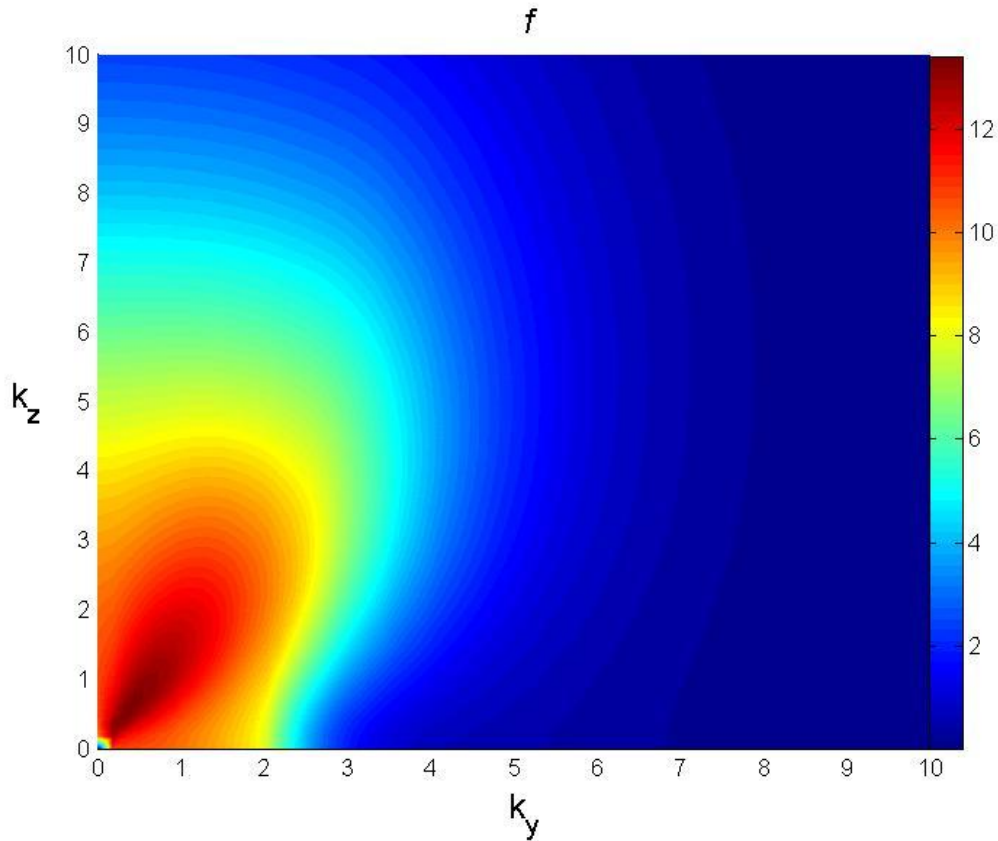
ნახ. 4 სიჩქარის კომპონენტების და ნორმირებული ენერგიის ევოლუცია სფჰ-თვის ტალღური რიცხვებით $k_x(0) = -6, k_y = 0.6, k_z = 0.2$. ამ შემთხვევაში, დინამიკა ანალოგიურია ორგანოზომილებიანი შემთხვევისა: სიჩქარის ყველა კომპონენტი, ტრანზიენტული გაძლიერების შემდეგ ისევ მცირდება, ძირითადად იმიტომ, რომ უბრუნებს დინებას ენერგიას რასაც ემატება ჩახშობა სიბლანტის დისიპაციის გამო.



ნახ. 5 სიჩქარის კომპონენტების და ნორმირებული ენერგიის ევოლუცია სფ3-თვის ტალღური რიცხვებით $k_x(0) = -6, k_y = 0.6, k_z = 0.5$. ამ შემთხვევაში, დინამიკა ანალოგიურია ნახ. 2-ზე გამოსახული შემთხვევის იმ განსხვავებით, რომ ენერგიის ზრდის ფაქტორი შედარებით ნაკლებია

კლებულობს ნულამდე, მაგრამ როგორც ეს ძირითადი განტოლებებიდან (10) და (11) ჩანს, სწორედ u_x კომპონენტის ხარჯზე ხდება სიჩქარის ამ ორი დანარჩენი კომპონენტის ზრდა წანაცვლების არსებობისას. ფიზიკურად, წანაცვლების გასწვრივი სიჩქარის ეს კომპონენტი ახდენს ძირითადი დინებიდან ენერგიის ამოღებას და შეშფოთებებისთვის გადაცემას, რომელიც თუ დისიპაცია არ არის, რჩება შეშფოთებებში. აქვე ავღნიშნავთ, რომ ორგანოზომილებიან შემთხვევაში ($k_z = 0$), შეშფოთების u_y სიჩქარის კომპონენტიც მცირდება ნულამდე ტრანზიენტული გაძლიერების შედეგად და ამიტომ ჰარმონიკის მთელი ენერგია უბრუნდება დინაზას.

ზემოთ მოყვანილ ნახაზებზე ნაჩვენებია იყო ჰარმონიკების ევოლუცია ტალღური რიცხვების ცალკეული მნიშვნელობებისთვის. ამ მხრივ საინტერესოა როგორ იცვლება ენერგიის ზრდის ფაქტორი როგორც ამ ტალღური რიცხვების უწყვეტი ფუნქცია. ეს საშუალებას მოგვცემს გავარკვევენ დავინიოთ როგორი ჰარმონიკებია დინებაში დომინანტი. ბუნებრივია დავახასიათოთ ჰარმონიკის ზრდა დინამიურ/წანაცვლების დროის განმავლობაში, რადგან ფიზიკურად ეს ზრდა წანაცვლებით არის გამოწვეული და მისი მახასიათებელი დრო სწორედ წანაცვლების დროის (A^{-1}) რიგისაა (უგანზომილებო ცვლადებში ჩვენ ავირჩიეთ $T = 3$) და განვსაზღვრეთ ზრდის ფაქტორი ამ დროის



ნახ. 6. დინამიური დროის ($T=3$) განმავლობაში ენერგიის ტრანზიენტული გაძლიერების ფაქტორის, f , დამოკიდებულება k_y და k_z ტალღურ რიცხვებზე.

განმავლობაში, ფიქსირებული k_y და k_z -თვის, როგორც ჰარმონიკის ენერგიის საბოლოო ($t=T$ მომენტში) და საწყისი ($t=0$ მომენტში) მნიშვნელობების ფარდობა (იხ. Bakas et al. 2001):

$$f(k_y, k_z) = \max_{k_{x0}} \frac{E(k_{x0}, k_y, k_z, T)}{E(k_{x0}, k_y, k_z, 0)}.$$

ნახ. 6-ზე წარმოდგენილია ამ ფუნქციის ორგანოზომილებიანი გრაფიკი. ამ ნახაზიდან ვხედავთ, რომ შედარებით ეფექტურად იზრდებიან ის ჰარმონიკები, რომელთათვისაც $k_y, k_z \leq 2$ (და ასევე $|k_x(t) \approx 0|$ როგორც ეს ზედა ნახაზებიდან ჩანს), ხოლო მაქსიმალური გაძლიერების ფაქტორს, $f_{\max} = 13.4$, შეესაბამება ტალღური რიცხვები $k_y = 0.5, k_z = 0.7$. მოსალოდენლია, რომ შემდგომ არაწრფივ რეჟიმში სწორედ ეს ოპტიმალური ჰარმონიკა იქნება დომინანტური სტრუქტურა, რომელიც განსაზღვრავს დინების შემდგომ გადასვლას ტურბულენტურ რეჟიმში (იხ., მაგ. Butler & Farrell 1992, Farrell & Ioannou 1993), ხოლო უკვე დამყარებულ ტურბულენტურ რეჟიმში სწორედ ასეთ ტალღურ რიცხვებზე მოხდება ენერგიის შეშვება ძირითადი დინებიდან ტურბულენტურ ფლუქტუაციებში.

ცხადია, ამ მოსაზრების დასადასტურებლად და უფრო ღრმად გამოკვლევისთვის პირდაპირი არაწრფივი რიცხვითი სიმულაციების ჩატარებაა საჭირო, რაც წარმოადგენს ჩვენს შემდგომ გეგმას, თუმცა როგორც დავინახეთ აქ შესრულებული წრფივი ანალიზი გვაძლევს მეტად საჭირო ინფორმაციას შემფოთებათა ზრდის მექანიზმზე, რომლის შედეგებითაც ვიხელმძღვანელებთ დინების არაწრფივი დინამიკის პირდაპირი რიცხვითი სიმულაციების ჩატარებისას.

4. დასკვნა

ამ ნაშრომში ჩვენ შევისწავლეთ სამგანზომილებიანი, უკუმშვად, მუდმივი წანაცვლების მქონე კუეტეს დინებაში შემფოთებების წრფივი ევოლუცია ანალიზური და რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით. კუეტეს დინება ხასიათდება სიჩქარის პროფილის მუდმივი წანაცვლებით და თავისი ელევანტურად მარტივი და ამავე დროს მნიშვნელოვანი კონფიგურაციის გამო საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ წანაცვლებით გამოწვეული შემფოთებათა ტრანზიენტული დინამიკა. შემფოთებები იქნა გაშლილი სივრცულ ფურიე ჰარმონიკებად (კელვინის მოდებად) და რიცხვითად იქნა გამოკვლეული ამ ჰარმონიკების დროში ევოლუცია და გაძლიერების დინამიკა ტალღური რიცხვების სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის. ჰარმონიკების ტრანზიენტულ გაძლიერებას საფუძვლად უდევს ორ-ის და როლ მექანიზმების კომბინაცია. ჩვენ ასევე გამოვიკვლიეთ, თითოეული ჰარმონიკის დროში სრულ ევოლუციასთან ერთად, სხვადასხვა ტალღური რიცხვის მქონე ჰარმონიკების ზრდა დინამიური დროის განმავლობაში და ავაგეთ ამ ზრდის მახასიათებელი ფაქტორის დამოკიდებულება ტალღურ რიცხვებზე. როგორც ასეთი ანალიზიდან გამოირკვა, ყველაზე ეფექტურ ზრდას განიცდიან პატარა ტალღური რიცხვების მქონე ჰარმონიკები, რომელსაც ასევე უწოდებენ ოპტიმალურ შემფოთებებს. მოველოდებით, რომ არაწრფივ რეჟიმში, რომელიც ჩვენი კვლევის შემდგომ ეტაპს წარმოადგენს, ასეთი ჰარმონიკები განსაზღვრავს დინების გადასვლას ტურბულენტურ რეჟიმში, ანუ სხვა სიტყვებით, წარმოადგენს იმ სტრუქტურებს რომლებიც გაჩნდებიან დინებაში ტურბულენტური გადასვლის ზღვარზე, ხოლო დამყარებულ ტურბულენტურ რეჟიმში სწორედ ასეთ ტალღურ რიცხვებზე მოხდება ძირითადი დინებიდან ენერგიის შემწვება ტურბულენტობაში.

ამ ნაშრომში, ჩვენ ჩავატარეთ შემფოთებათა დინამიკის საბაზისო ელემენტების -- სივრცული ფურიე ჰარმონიკების ევოლუციის და დინამიკის წრფივი ანალიზი, რომელიც

იქნება დასაყრდენი და მნიშვნელოვნად დაგვეხმარება არწრფივი დინამიკის (ტურბულენტობის) შემდგომ გააზრებაში. იგი წარმოდგენას გვაძლევს თუ როგორ ხდება დინებასა და შეშფოთებებს შორის ენერგიის მიმოცვლა, რის საფუძველზეც ფაქტობრივად მოხდება ტურბულენტობის ენერგეტიკული კვება. არწრფივობის როლი, კი როგორც ცნობილია (Horton et al. 2010), დაიყვანება ისეთი ჰარმონიკების რეგენერაციაზე, რომლებსაც შეუძლიათ განიცადონ ტრანზიენტული ზრდა (ე.ი., იმ ჰარმონიკების რომელთათვისაც, $k_x / k_y < 0$), რადგან თვითონ არწრფივი წევრები არ მონაწილეობენ დინებიდან ენერგიის მიღებაში.

გამოყენებული ლიტერატურა

- Armitage P., *Dynamics of Protoplanetary Discs*, ARA&A, 2011, **49**, 195
- Bakas N., Ioannou P., & Kefaliakos G., *the Emergence of Coherent Structures in Stratified Shear Flow*, J. Atmos. Sci., 2001, **58**, 2790
- Bakas N., Farrell P., *Gravity Waves in a Horizontal Shear Flow. Part II: Interaction between Gravity Waves and Potential Vorticity Perturbations*, J. Phys. Oceanogr., 2009, **39**, 497
- Butler, K. M., Farrell B. F., *Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow*, Phys. Fluids A, 1992, **4**, 1637–1650.
- Balbus S., *Enhanced Angular Momentum Transport in Accretion Disks*, ARA&A, 2003, **41**, 555
- Bodo G., Chagelishvili G., Murante G., Tevzadze A., Rossi P., Ferrari A., *Spiral density wave generation by vortices in Keplerian flows*, A&A, 2005, **437**, 9
- Chagelishvili G., Zahn J.-P., Tevzadze A., Lominadze J., *On hydrodynamic shear turbulence in Keplerian disks: Via transient growth to bypass transition*, A&A, 2003, **402**, 40
- Chagelishvili G.D., Chanishvili R.G., Hristov T., Lominadze J.G., *A Turbulence Model in Unbounded Smooth Shear Flows: The Weak Turbulence Approach*, JETP, 2002, **94**, 434
- Drazin P., Reid W., *Hydrodynamic Stability*, 1981, Cambridge University Press
- Farrell B. F., Ioannou P. J., *Optimal excitation of three-dimensional perturbations in viscous constant shear flow*, Phys. Fluids A, 1993, **5**, 1390
- Goldreich P., Lynden-Bell D., *II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities*, MNRAS, 1965, **130**, 125
- Hawley J. F., Gammie C. F., Balbus S. A., *Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks*, ApJ, 1995, **440**, 742

- Horton W., Kim J-H., Chagelishvili G.D., Bowman J.C., Lominadze J.G., *Angular redistribution of nonlinear perturbations: A universal feature of nonuniform flows*, 2010, Phys. Rev. E., **81**, 066304
- Heinemann T., Papaloizou J. C. B., *The excitation of spiral density waves through turbulent fluctuations in accretion discs - I. WKB theory*, MNRAS, 2009, **397**, 52
- Landau L., Lifshitz E., *Fluid Mechanics*, 1959, Pergamon Press
- Lominadze J., Chagelishvili G. & Chanishvili R., *The Evolution of Nonaxisymmetric Shear Perturbations in Accretion Disks*, Sov. Astron. Lett., 1988, **14**, 364
- Mamatsashvili G.R., Chagelishvili G. D., *Transient growth and coupling of vortex and wave modes in self-gravitating gaseous discs*, MNRAS, 2007, **381**, 809
- Reddy S. C., Schmid P. J., Henningson D. S., SIAM J. Appl. Math., 1993, **53**, 15
- Reddy S. C., Henningson D. S., *Energy growth in viscous channel flows*, J. Fluid Mech., 1993, **252**, 209
- Schmid. P., Henningson D., *Stability and transition in shear flows*, 2001, Springer
- Tevzadze A.G., Chagelishvili G.D., Zahn J., *Hydrodynamic stability and mode coupling in Keplerian flows: local strato-rotational analysis*, A&A, 2008, **478**, 9
- Tevzadze A.G., Chagelishvili G.D., Zahn J., Chanishvili R. G., Lominadze J. G., *On hydrodynamic shear turbulence in stratified Keplerian disks: Transient growth of small-scale 3D vortex mode perturbations*, A&A, 2003, **407**, 779
- Thompson W., 1887, Philos. Magazine, **24**, 188
- Vanneste J., Yavneh I., *Exponentially Small Inertia Gravity Waves and the Breakdown of Quasigeostrophic Balance*, J. Atmos. Sci., 2004, **61**, 211
- Trefethen L. N., Trefethen A. E., Reddy S. C., Driscoll T. A., *Hydrodynamic stability without eigenvalues*, Science, 1993, **261**, 57
- Yecko P. A., *Accretion disk instability revisited. Transient dynamics of rotating shear flow*, A&A, 2004, **425**, 385