

თბილისის ივანე ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ფიზიკის მიმართულება - ელემენტარული ნაწილაკები და კვანტური ველები



კვანტური ნაწილაკის მოძრაობა უსასრულო სიღრმის ორმოში
ადიაბატურად ცვლადი გეომეტრიით

ავტორი:

დაჩი მეურმიშვილი

ხელმძღვანელი:

სრული პროფესორი მერაბ ელიაშვილი

თბილისი 2014 წელი

სარჩევი

• თავფურცელი -----	1
• სარჩევი -----	2
• ანოტაცია -----	3
• შესავალი -----	4
• კვანტური ნაწილაკის მოძრაობა უსასრულო სიღრმის ორმოში ადიაბატურად ცვლადი გეომეტრიით -----	6
• დასკვნა -----	15
• გამოყენებული ლიტერატურა -----	16
• დანართები	

ანოტაცია

მოცემულ საბაკალავრო ნაშრომში განხილულია ნაწილაკის მოძრაობა ერთგანზომილებიან უსასრული სიღრმის კვანტურ ორმოში, რომლის სიგანეც დროში ცვლად ფუნქციას წარმოადგენს. ამოცანის დასმისას აქცენტი გაკეთებულია ადიაბატურად ცვლად გეომეტრიაზე, რომელიც თუ სივრცის ტოპოლოგია იძლევა საშუალებას, წარმოქმნის ბერის ფაზას. ამოცანის ამოხსნისას განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებული ფაზის გამოთვლას. ჩვენს შემთხვევაში ამოცანის ტოპოლოგია ტრივიალურია, ამიტომ ბერის ფაზა არ წარმოიქმნება. ამასთან დასმული ამოცანა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც საცდელი მიახლოება უფრო რთული, არატრივიალური გეომეტრიის მქონე ამოცანებისათვის.

annotation

Given bachelor work describes quantum particle in the one dimensional infinite square well with time dependent boundary conditions, more precisely when the width of the well is changing in time, is the time function. While stating the problem we stressed the adiabatically changing geometry, which, if the topology of the space admits, gives rise to the geometrical phase, so called Berry's phase. While solving the problem our main pursuit was to calculate time dependent phase factor of the wave function. In our case the topological space of the problem was trivial so Berry's phase didn't generate. Therefore our problem can be supposed to be an attempting approach to more challenging problems with non-trivial topological space.

შესავალი

ადიაბატური პროცესები განიხილება როგორც კლასიკურ, ასევე კვანტურ მექანიკაში.

სისტემის ადიაბატური ხასიათი უკავშირდება, გარეშე პირობების ისეთი სახის ცვლილებებს, რომელთაც შეშფოთება არ შეაქვთ სისტემის შიდა მახასიათებლებში. კერძოდ განვიხილოთ ასეთი მაგალითი:

წარმოვიდგინოთ ქანქარა, რომელიც დამაგრებულია საყრდენზე. ქანქარა ასრულებს ჰარმონიულ რხევას. ახლა ჩვენ თუ დავუშვებთ, რომ საყრდენი თავდაც განიცდის რხევას, მაშინ მოცემული პროცესისათვის გვეჩვენება ორი დრო. T_i – „შინაგანი“ დრო, რომელიც არის ქანქარის რხევის პერიოდი და T_e – „გარეგანი“ დრო, ანუ საყრდენის რხევის პერიოდი. მაშინ ადიაბატური პროცესი იქნება ის რომლისთვისაც შესრულდება პირობა: $T_e \gg T_i$.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ჰამილტონიანი არ არის დროზე დამოკიდებული ნაწილაკის n -ური მდგომარეობა აღიწერება განტოლებით:

$$\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

ანუ ნაწილაკი, რომელიც იმყოფებოდა n -ურ საკუთარ მდგომარეობაში, რჩება იმავე მდგომარეობაში და იძენს დროით ფაზურ მამრავლს:

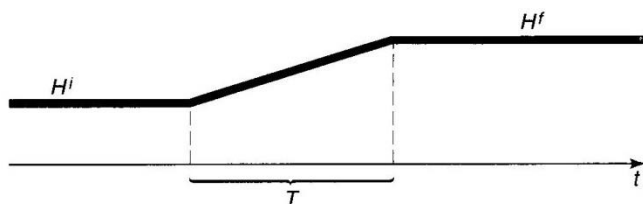
$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$$

იმ შემთხვევაში კი, როდესაც ჰამილტონიანი იცვლება დროში, საკუთარი ფუნქციებიც და საკუთარი მნიშვნელობებიც დროზე დამოკიდებული ხდება,

$$\hat{H}(t)\psi_n(x, t) = E_n(t)\psi_n(x, t)$$

მაგრამ, თუ ჰამილტონიანის დროში ცვლილება მიმდინარეობს ადიაბატურად, მაშინ ადიაბატური მიახლოება ნიშნავს, რომ თუ ნაწილაკი თავდაპირველად იმყოფებოდა H^i „საწყისი ჰამილტონიანი“-ს n -ურ საკუთარ მდგომარეობაში, მაშინ გადასვლის შემდეგ ნაწილაკი აღმოჩნდება H^f „საბოლოო ჰამილტონიანი“-ს ასევე n -ურ საკუთარ მდგომარეობაში.

(სიცხადისათვის დავუშვათ რომ სპექტრი დისკრეტული და გადაუგვარებელია ამ გადასვლის მანძილზე, რომ არ მოხდეს მდგომარეობების რიგების არევა).



ადიაბატური ცვლილების მაგალითი
ჰამილტონიანში H^i დან H^f გადასვლისას.

თუმცა ასეთი გადასვლისას შეიძენს არა მხოლოდ სტანდარტულ დროით ფაზურ მამრავლს, არამედ კიდევ დამატებით რაღაც ფაზურ წევრს.

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} e^{i\gamma_n(t)}$$

გამოსახულებას $\left(-\frac{1}{2} \int_0^t E_n(t') dt'\right) = \Theta_n(t)$ უწოდებენ დინამიურ ფაზას, რომელიც სტანდარტული ფაზური ფაქტორის $(-E_n t / \hbar)$ განზოგადებაა. დამატებითი წევრი $\gamma_n(t)$ - კი წარმოადგენს გეომეტრიულ ფაზას. ჯერ-ჯერობით ჩვენ არ ვიცით რა მნიშვნელობას ატარებს ეს წევრი, ან თუ ატარებს საერთოდ. მაგრამ ადიაბატური მიახლოება არ გამოირიცხავს ასეთი წევრის არსებობას, რადგან ნაწილაკი ისევ „n-ური“ საკუთარ ნარჩუნდება.

$$\gamma_n(t) = i \oint_{R^i}^{R^f} d\vec{R} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle$$

თუ რაღაცა T დროის შემდეგ სისტემის აღმწერი ჰამილტონიანი თავის საწყის ფორმას დაუბრუნდება $R^i = R^f$ მივიღებთ

$$\gamma_n(t) = i \oint d\vec{R} \langle \psi_n | \nabla_R \psi_n \rangle$$

ეს გამოსახულება არის შეკრული წირითი ინტეგრალი პარამეტრულ სივრცეში, რომელიც ზოგადად არ არის ნული. მოცემული ფორმულა მიიღო მიქაელ ბერიმ 1984 წელს. $\gamma_n(t)$ -ს ეწოდება ბერის ფაზა. მოცემული გამოსახულება არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა

სისწრაფით მოხდა გზის გავლა, მხოლოდ იმის გათვალისწინებით, რომ იგი საკმაოდ ნელა ხდება, რომ ადიაბატურობის პირობა დაკმაყოფილდეს.

ზემოთ ნახსენებ ჰამილტონიანის გარდაქმნებში ჩვენ საუბარი გვაქვს არა „მცირე“ ცვლილებაზე, რაც შეშფოთების თეორიაში გამოიყენება, არამედ „დიდი“ ცვლილებაზე, მაგრამ იმ პირობით, რომ ეს ცვლილება საკმარისად ნელა ხდება.

კვანტური ნაწილაკის მოძრაობა უსასრულო სიღრმის ორმოში ადიაბატურად ცვლადი გეომეტრიით

გარეშე პირობების ცვლილებები შეიძლება აისახოს, ან უშუალოდ ჰამილტონიანში შემავალი პარამეტრების დროზე დამოკიდებულებით, ან სასაზღვრო ამოცანაში მოქმედი სასაზღვრო პირობების ცვლილებით. მოცემულ საბაკალავრო ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ მეორე ტიპის ადიაბატურ პროცესებს, როდესაც იცვლება ადიაბატურად სისტემის გეომეტრიული მახასიათებლები. კერძოდ განვიხილება უსასრულო სიღრმის ორმოში მოთავსებული კვანტურ-მექანიკური ნაწილაკი და გამოითვლება მისი ტალღური ფუნქცია.

განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებული ფაზის გამოთვლას. საზოგადოდ ცნობილია, რომ ადიაბატური პროცესები განაპირობებენ ე.წ. ბერის ფაზის წარმოქმნას. ეს უკანასკნელი წარმოიქმნება მაშინ, როდესაც ადიაბატურად ცვლადი პარამეტრების სივრცე ტოპოლოგიურად არ არის ტრივიალური. ჩვენს ამოცანაში ტოპოლოგია ტრივიალურია ამიტომ ბერის ფაზა არ წარმოიქმნება. ამასთან დასმული ამოცანა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც საცდელი მიახლოება უფრო რთული, არატრივიალური გეომეტრიის მქონე ამოცანებისათვის.

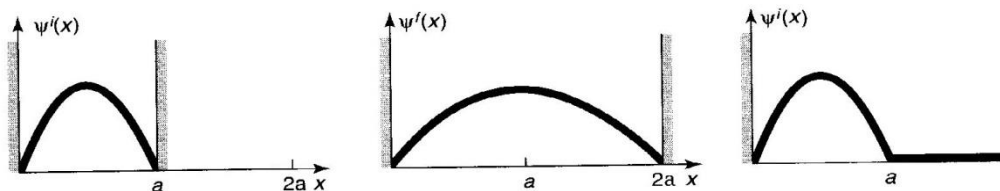
კიდევ ერთი მაგალითი: ვთქვათ მომზადებული გვაქვს კვანტური ნაწილაკი უსასრულო სიღრმის ორმოში ძირითად ენერგეტიკულ დონეზე, მისი ტალღური ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right)$$

ახლა თუ ადიაბატურად გავზრდით ორმოს კედელს $2a$ -მდე, მაშინ ადიაბატური მიახლოება გვეუბნება, რომ ნაწილაკის ახალ ტალღურ ფუნქციას უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე;

$$\psi^f(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{2a} x\right)$$

და შეიძლება კიდევ გაუჩნდეს დამატებითი ფაზური ფაქტორი.

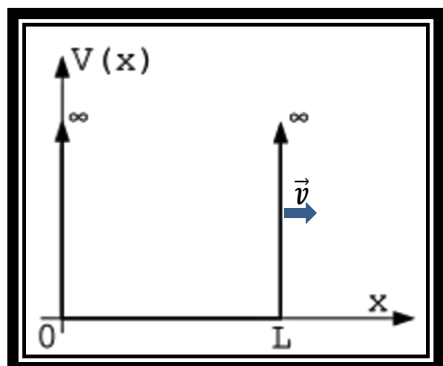


პირველ სურათზე ნაჩვენებია ნაწილაკი, რომელიც იმყოფება უსასრულო სიღრმის ორმოში, ძირითად დონეზე,

მეორე სურათზე ორმო ფართოვდებოდა ნელა, ადიაბატურად და ნაწილაკი ინარჩუნებს ძირითად დონეს. (ისევ ძირითად დონეზეა).

მესამე სურათზე კი ორმო სწრაფად გაფართოვდა და ნაწილაკი მომენტალურად დარჩენილია მის თავდაპირველ ψ^i მდგომარეობაში. შედეგად მიღებულია ისევ თავდაპირველი ψ^i მდგომარეობა, რომელიც წარმოდგება ახალი ჰამილტონიანის საკუთარი მდგომარეობების (ანუ საკუთარი ფუნქციების) წრფივი კომბინაციით.

განვიხილოთ ნაწილაკი უსასრულო სიღრმის ორმოში, რომლის სიგანეც მუდმივი სიჩქარით ფართოვდება.



სისტემა იმართება შემდეგი ჰამილტონიანით,

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad \hat{\mathcal{H}}_0 \text{ დროზე დამოუკიდებელი ჰამილტონიანი}$$

პოტენციალს აქვს სახე:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \ell \\ \infty & \text{სხვა ყველგან} \end{cases}$$

როგორც ცნობილია შრედინგერის დროზე დამოუკიდებელი განტოლება გამოიყურება შემდეგნაირად;

$$\hat{\mathcal{H}}_0 U_n = E_n U_n$$

რომლის ამონახსნიც, მოცემულ სასაზღვრო პირობებში,

$$U_n|_{x=0} = U_n|_{x=\ell} = 0,$$

ცნობილია და აქვს შემდეგი სახე:

$$U_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right)$$

$$\text{ხოლო ენერგიის დონეები: } E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m \ell^2}$$

ჩვენი მიზანია განვიხილოთ იგივე ამოცანა, ოღონდ ამჯერად ის შემთხვევა, როდესაც წინასწარ მოცემული სასაზღვრო პირობები დროზე დამოკიდებული. კერძოდ როცა Φ -ის ერთი კედელი განიცდის დროში ცვალებად მოძრაობას.

მაშინ პოტენციალს ექნება შემდეგი სახე:

$$V(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L(t) \\ \infty & \text{სხვა ყველგან} \end{cases}$$

პროცესის აღმწერი ჰამილტონიანის ცვლილება გამოიხატება პოტენციალის დროზე დამოკიდებულებაში

$$\hat{H}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t)$$

მაგრამ, Φ -ის შიგნით პოტენციალი ნულია, შესაბამისად პოტენციალი არ გვაქვს. დროზე დამოკიდებული გახდება მხოლოდ სასაზღვრო პირობები,

$$\Phi_n(0, t) = \Phi_n(L(t), t) = 0$$

ჩვენთვის უკვე ნაცნობი ამონახსნიც გახდება დროზე დამოკიდებული და მიიღებს შემდეგ სახეს;

$$\Phi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L(t)}} \sin\left(\frac{\pi n}{L(t)} x\right)$$

მაშინ საძიებელი იქნება შემდეგი განტოლების ამონახსნი;

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi_n(x, t) = \hat{H} \Phi_n(x, t) \quad (1)$$

რომელიც ვეძებთ ჩვენთვის ცნობილი U_n ფუნქციისა და უცნობი $\mathcal{F}_n$ ფუნქციის ნამრავლის სახით. $\mathcal{F}_n$ ფუნქცია კი წარმოვადგინოთ ამ სახით: $\mathcal{F}_n \sim e^{i\gamma(t,x)}$,

$$\Phi_n(x, t) = U_n(x, t) e^{i\gamma(t,x)}$$

შემდგომში ქვემოთ ყველგან გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$\frac{\partial}{\partial t} A = \dot{A} \quad \frac{\partial}{\partial x} A = A'$$

გამოვიტვალოთ (1) განტოლების მარცხენა წევრი;

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi_n(x, t) &= -\frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) e^{i\gamma(t, x)} - i\hbar \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \frac{\pi n}{L^2} x \dot{L} (e^{i\gamma(t, x)}) + \\ &\quad + ii\dot{\gamma}\hbar \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) e^{i\gamma(t, x)} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi_n(x, t) &= \Phi_n i\hbar \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) - \cot\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) \left(\frac{\pi n}{L} x \right) + i\dot{\gamma} \right] \end{aligned}$$

ახლა გამოვიტვალოთ (1) განტოლების მარჯვენა წევრი;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_n &= \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \frac{\pi n}{L} e^{i\gamma(t, x)} + i\gamma' \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) e^{i\gamma(t, x)} \\ \frac{\partial}{\partial x} \Phi_n &= \Phi_n \left[\cot\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \frac{\pi n}{L} + i\gamma' \right] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_n &= \Phi_n \left[\cot\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \frac{\pi n}{L} + i\gamma' \right]^2 + \left[-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi n}{L} x\right)} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 + i\gamma'' \right] \Phi_n \\ \hat{\mathcal{H}} \Phi_n(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left[\cot\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \frac{\pi n}{L} + i\gamma' \right]^2 + \left[-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi n}{L} x\right)} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 + i\gamma'' \right] \right\} \Phi_n \end{aligned}$$

გამარტივების შემდეგ

$$\hat{\mathcal{H}} \Phi_n(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} (i\gamma'') - \frac{\hbar^2}{m} (i\gamma') \cot\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \left(\frac{\pi n}{L} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma')^2$$

აქ გამოვიყენეთ $\frac{1}{\sin^2} + \cot^2 = -1$

$$\begin{aligned} i\hbar \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) - \cot \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) \left(\frac{\pi n}{L} x \right) + i\dot{\gamma} \right] = \\ = -\frac{\hbar^2}{2m} (i\gamma'') - \frac{\hbar^2}{m} (i\gamma') \cot \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \left(\frac{\pi n}{L} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma')^2 \end{aligned}$$

ორივე მხარე გავამრავლოთ i ზე

$$\begin{aligned} -\hbar \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) - \cot \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) \left(\frac{\pi n}{L} x \right) + i\dot{\gamma} \right] = \\ = \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma'') + \left(\frac{\hbar^2}{m} \gamma' \right) \cot \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \left(\frac{\pi n}{L} \right) + i \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma')^2 + i \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

ჩვენი ამოცანაა $\gamma(t, x)$ ფუნქციის სახის დადგენა.

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) + \left[\cot \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) \left(\frac{\pi n}{L} \right) \hbar - \left(\frac{\hbar^2}{m} \gamma' \right) \cot \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \left(\frac{\pi n}{L} \right) \right] - \hbar i\dot{\gamma} - \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma'') - \\ - i \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma')^2 = i \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \\ \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) + \cot \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \left(\frac{\pi n \hbar}{L} \right) \left[\frac{\dot{L}}{L} x - \frac{\hbar}{m} \gamma' \right] - \hbar i\dot{\gamma} - \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma'') - i \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma')^2 = \\ i \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \quad (3) \end{aligned}$$

თუ დავაკვირდებით დავინახავთ, რომ განტოლების მარჯვენა მხარე მარტო დროით ცვლადზეა დამოკიდებული, შესაბამისად

$$\frac{\partial}{\partial x} (RHS) = 0$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მარცხენა მხარე კოორდინატით გაწარმოების შემდეგ უნდა გავუტოლოთ ნულს. საიდანაც ვიღებთ პირობას,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \cot \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \left(\frac{\pi n \hbar}{L} \right) \left[\frac{\dot{L}}{L} x - \frac{\hbar}{m} \gamma' \right] \right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cot(x) = -\sec^2(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{\dot{L}}{L} x - \frac{\hbar}{m} \gamma' = 0$$

საიდანაც შეგვიძლია $\gamma(x, t)$ ვიპოვოთ. რაღაც ფუნქციამდე სიზუსტით.

$$\gamma(x, t) = \frac{m}{2\hbar} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) x^2 + \beta(t) \quad (4)$$

თუ ჩავსვამთ მოცემულ გამოსახულებას (3) განტოლებაში, ნამდვილ და წარმოსახვით წევრებს ცალკე-ცალკე გავუტოლოთ ნულს და გავითვალისწინებთ, რომ ტრიგონომეტრიული წევრი ნულდება, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას $\gamma(x, t)$ თვის:

$$\hbar \dot{\gamma} + \frac{\hbar^2}{2m} (\gamma')^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 = 0 \quad (5)$$

$$\gamma' = \frac{m}{\hbar} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) x \quad \dot{\gamma} = \frac{m}{2\hbar} \left(\frac{\ddot{L}L - (\dot{L})^2}{L^2} \right) x^2 + \dot{\beta}$$

ჩავსვათ (5) განტოლებაში და გვექნება;

$$\frac{m}{2} \left(\frac{\ddot{L}L - (\dot{L})^2}{L^2} \right) x^2 + \hbar \dot{\beta} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{m}{\hbar} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) x \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 = 0 \quad (5 \#)$$

გამარტივების შემდეგ მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს;

$$\frac{m}{2} \left(\frac{\ddot{L}L}{L^2} \right) x^2 + \hbar \dot{\beta} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 = 0 \quad (5 \#)$$

ამ ეტაპიდან უკვე საჭიროა განვსაზღვროთ კედლის გაფართოების ხასიათი. ანუ ამოცანის ამოხსნა დავიდა ცვალებადი სასაზღვრო პირობების განსაზღვრამდე. პირველ ჯერზე ავიღოთ ის შემთხვევა, როდესაც კედელი ფართოვდება დროის პროპორციულად, ანუ

$$\ell \rightarrow L(t) = \ell + vt, \quad L(t) \text{ დროის წრფივი ფუნქციაა. } v = \text{const}.$$

ამ შემთხვევის ანალიზურად ამოხსნა მოყვანილია ქვემოთ.

$$\ddot{L} = 0 \quad \text{და} \quad \hbar \dot{\beta} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\beta} = -\frac{\hbar}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m \ell^2}$$

$$\dot{\beta} = -\frac{E_n \ell^2}{\hbar L^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{E_n \ell^2}{\hbar} \int dt \frac{1}{(\ell + vt)^2} = -\frac{E_n \ell^2}{\hbar} \left[-\frac{1}{v} \frac{1}{(\ell + vt)} + C \right] = \\ &= \frac{E_n \ell^2}{\hbar v} \left[\frac{1}{(\ell + vt)} - C \right] = \frac{E_n \ell^2}{\hbar v} \left[\frac{1 - C\ell - Cvt}{(\ell + vt)} \right] = \end{aligned}$$

C - ნებისმიერი მუდმივია და როგორც მინდა ისეთი შემოიღო ავიღო ;

ავიღოთ $C = 1/\ell$

$$\beta = -\frac{E_n \ell^2}{\hbar v} \left[\frac{\frac{vt}{\ell}}{(\ell + vt)} \right] = -\frac{E_n \ell^2}{\hbar} \frac{t}{\ell L} = -E_n \frac{\ell}{L \hbar} t$$

ჩავსვათ მიღებული $\beta(t)$ -ს გამოსახულება (4)-ში და მივიღებთ საძიებელ გეომეტრიულ ფაზურ ნაწილს.

$$\gamma(x, t) = \frac{m}{2\hbar} \left(\frac{\dot{L}}{L} \right) x^2 - E_n \frac{\ell}{L \hbar} t \quad (6)$$

$$L = \ell + vt ; \quad \dot{L} = v$$

$$\gamma(x, t) = \frac{1}{2} \frac{mv}{\hbar L} x^2 - \frac{E_n}{\hbar} \frac{\ell}{L} t \quad (6\#)$$

მიღებული შედეგი შევიტანოთ ტალღურ ფუნქციაში და გვექნება;

$$\Phi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L(t)}} \sin\left(\frac{\pi n}{L(t)} x\right) e^{i\left(\frac{1}{2} \frac{mv}{\hbar L} x^2 - \frac{E_n}{\hbar} \frac{\ell}{L} t\right)} \quad (7)$$

(7) ფუნქცია წარმოადგენს მოცემული ნაშრომის ძირითად შედეგს. მისი გამოყენებით შეგვიძლია აღვწეროთ ნაწილაკის ალბათობის სიმკვრივის განაწილება ერთგანზომილებიან კვანტურ ორმოში, როდესაც ორმოს სიგანე იცვლება წრფივად მუდმივი სიჩქარით.

მოცემული ვარიანტი ანალიზურად ამოხსნადი იყო, რადგან

1) $\ell \rightarrow L(t) = \ell + vt$ წარმოადგენდა დროის წრფივ ფუნქციას.

საქმე გაცილებით გართულდება, თუ ჩვენ ავიღებთ უფრო რთული სახის სასაზღვრო პირობებს.

მაგალითად ფიზიკურად საინტერესო იყო შემდეგი სახის სასაზღვრო პირობების შესწავლა:

2) $\ell \rightarrow L(t) = \ell + \sin(t)$

3) $\ell \rightarrow L(t) = \ell + e^t$

იმისათვის რომ მიმეღო მოცემული სასაზღვრო პირობებისათვის ტალღური ფუნქციის ალბათობის განაწილება სივრცეში, მივმართე რიცხვით მეთოდს, რადგან ანალიზურად მათი დათვლა ვერ მოვახერხე.

დასათვლელად გამოვიყენე კომპიუტერული პროგრამა MatLab, ხოლო დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად RK-4 მიახლოება.

დაწერილი პროგრამა რომლითაც დავითვალე ეს ორი შემთხვევა ვთვლი, რომ სწორია, იმის საფუძველზე, რომ ამ პროგრამით დათვლილი, წრფივი, 1-ლი სასაზღვრო პირობის დროს მიღებული, ტალღური ფუნქციის ალბათობის განაწილება სივრცეში, ემთხვევა ანალიზურად მიღებულ შედეგს.

რადგან, ანალიზურად მიღებული შედეგი პირდაპირ შევიტანე პროგრამაში და დავახატინე ტალღური ფუნქციის ალბათობის განაწილება, პროგრამას არ შეეძლო რაიმე სახის შეცდომა დაეშვა. უბრალოდ დახატა ის რაც მივაწოდე. შესაბამისად თუ ამ ანალიზურად მიღებული შედეგის გრაფიკს, რიცხვითად დათვლილი შედეგი ემთხვევა, მაშინ პროგრამა სწორად მუშაობს და მისი მე-2 და მე-3 სასაზღვრო პირობებში მიღებული ამონახსნებიც სანდოა.

მოცემული დავალების შესრულებაში დამეხმარა ბატონი დავით კაკულია, რომელსაც უღრმეს მადლობას ვუხდით.

დასკვნა

ნაშრომში განხილული იყო კვანტური ნაწილაკის მოძრაობა, უსასრულო სიღრმის მართკუთხა ორმოში, ადიაბატურად ცვლადი სასაზღვრო პირობების დროს. მოხერხდა, ანალიზურად, სისტემის ჰამილტონიანის საკუთარი ტალღური ფუნქციის პოვნა. ასევე ანალიზურად გამოთვლილია დროზე დამოკიდებული ფაზური ფაქტორი წრფივ სასაზღვრო პირობებში, როდესაც ორმოს სიგანე მუმივი სიჩქარით ფართოვდება. ასევე დათვლილია, რიცხვითი მეთოდებით, კომპიუტერზე, ის შემთხვევები, როდესაც მოძრაობას ჰქონდა რხევითი ხასიათი და როდესაც ხდებოდა ორმოს სიგანის ექსპონენციალური გაფართოება. აღნიშნული სამუშაოები წარმოადგენს ერთგვარ შემამზადებელ საფეხურს ადიაბატურად ცვლადი რთული გეომეტრიის მქონე ამოცანების ამოხსნისათვის. ჩვენს შემთხვევაში განხილული ამოცანა იყო ტრივიალური ტოპოლოგიით და დამატებითი გეომეტრიული, ბერის ფაზა არ წარმოიქმნა, მაგრამ მომავალში უკვე განვიხილავთ არატრივიალური ტოპოლოგიური სივრცის მქონდე ამოცანებს, სადაც შესაძლებელი იქნება ბერის ფაზის დაფიქსირება.

გამოყენებული ლიტერატურა:

Introduction in Quantum Mechanics

D. J. Griffiths

1995 Prentice Hall Inc.

Solving ODE in MATLAB

P. Howard

Fall 2007

Infinite Square-Well Potential with a Moving Wall

S. W. Doescher and M. H. Rice

Am. J. Phys. 37, 1246 (1969)