ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მიმართულება

არაპარამეტრული სტატისტიკური შეფასებების შესახებ

ანა კინწურაშვილი

(სამაგისტრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი:

ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი
გრიგოლ სოხაძე

თბილისი, 2014 წ

შინაარსი

შესავალი

მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ამოცანაა ჩატარებული დაკვირვებების საფუძველზე განაწილების კანონის დადგენა ან მოცემული განაწილების კანონების სიმრავლიდან ამა თუ იმ უცნობი პარამეტრისა და სხვა მახასიათებლების დადგენა. თანაც ეს უნდა მოხდეს ოპტიმალური საშუალებების გათვალისწინებით. თვით ოპტიმალურობის პირობები ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში დასმული ამოცანიდან გამომდინარეობს.

აღწერილი ამოცანა მეტად ზოგადი ხასიათისაა. სხვადასხვა კერძო სახის პრობლემებზე მუშაობა XIX საუკუნის ყველაზე ცნობილმა მათემატიკოსებმა დაიწყებს, რადგანაც ამ მოღვაწეობას უშუალო პრაქტიკული მნიშვნელობა ჰქონდა სადაზღვეო საქმეში და სოციალურ სტატისტიკაში. ამ პერიოდის მკვლევარებიდან უნდა გამოვყოთ კ. გაუსი, რომელიც დიდ დროს უთმობდა სტატისტიკური მასალების დამუშავებასა და ასეთი დამუშავების მეთოდების შექმნას. თუმცა წარმატებული, სისტემატიური და ფართემაშტაბიანი კვლევები მათემატიკურ სტატისტიკაში XX საუკუნის 30-იანი წლებიდან იწყება, როცა ა. კოლმოგოროვისა და ნ. სმირნოვის შრომებში გადაწყვეტილ იქნა პრინციპული ხასიათის საკითხები დაკავშირებული თეორიული განაწილების ფუნქციის შეფასებისა ე. წ. ემპირიული განაწილების ფუნქციის საშუალებით. ამ კვლევებში, რომლებიც დღესაც დიდი ინტენსივობით ვითარდება, ჩართული არიან მსოფლიოს მრავალი ქვეყნის წამყვანი მათემატიკოსები.

მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანები, პირობითად, ორ დიდ კლასად შეიძლება იქნეს დაყოფილი: პარამეტრული და არაპარამეტრული შეფასებები. პირველ შემთხვევაში წინასწარ ცნობილია განაწილების ფუნქციის კლასი და დაკვირვებების საშუალებით უნდა შეფასდეს გარკვეული პარამეტრები. მეორე კლასის ამოცანების ძირითად პრობლემას კი თვით განაწილების აღწერა წარმოადგენს.

ამ ნაშრომში შევეხებით სწორედ არაპარამეტრული სტატისტიკური შეფასებების ზოგიერთ ასპექტს. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ამ მიმართულებით საქართველოში მოქმედი მეცნიერების დამსახურება საკმაოდ მნიშვნელოვანია. XX საუკუნის 50-იანი წლებიდან დაწყებული პროფესორი გ. მანია (პროფ. ნ. სმირნოვის მოსწავლე) სისტემატიურად აქვეყნებდა მეტად მნიშვნელოვან შედეგებს (იხ. მისი მონოგრაფია [1]). უნდა აღინიშნოს პროფ. რ. ჩიტაშვილის და მისი მოსწავლეების მეტად ორიგინალური გამოკვლევები. განსაკუთრებულია პროფესორ ე. ნადარაიას წვლილი აღნიშნულ თეორიაში. ის ერთ-ერთი პირველთაგანი იყო, ვინც შემთხვევითი სიდიდის უცნობი განაწილების სიმკვრივისათვის ე. წ. გულოვანი ძალმოსილი შეფასებები ააგო და აჩვენა სხვადასხვა სახის ზღვარითი თეორემების სამართლიანობა. პროფ. ე. ნადარაიამ პირველმა შეაფასა რეგრესიის წირი არაპარამეტრული მეთოდების გამოყენებით და ამ მეთოდს ლიტერატურაში ნადარაია-ვატსონის მეთოდი ეწოდება.

ჩვენ მოვიყვანთ არაპარამეტრული შეფასებების ამოცანების დასმისა და გადაწყვეტის უნიფიცირებულ მეთოდებს და შემდეგ ამ მეთოდებზე დაყრდნობით მივიღებთ შეფასების სხვა შედეგებს.

თავი 1

ალბათური განაწილების სიმკვრივის გულოვანი შეფასებები. ერთგანზომილებიანი შემთხვევა

ამ ნაწილში ჩვენ განვიხილავთ არაპარამეტრული სტატისტიკური შეფასების ამოცანის დასმას და მოვიყვანთ ძირითადი პრობლემატიკის მიმოხილვას. აქვე განვიხილავთ სხვადასხვა სტატისტიკური კრიტერიუმების შეფასებას. მოვიყვანთ, აგრეთვე ამ პრობლემატიკასთან დაკავშირებულ ზღვარით თეორემებს.

1.1. ამოცანის დასმა

გულოვანი შეფასებები წარმოადგენს არაპარამეტრული სტატისტიკური შეფასებების უმნიშვნელოვანეს კლასს. მისი სპეციფიკიდან გამომდინარე, ასეთი მიდგომა გულისხმობს გარკვეულ შეზღუდვებს განსახილველ კლასზე. აქ ჯერ-ჯერობით განვიხილავთ მხოლოდ ერთგანზომილებიან შემთხვევას. ამ კერძო შემთხვევაში კარგად გამოიკვეთება პრობლემატიკის მთელი სპექტრი. განვიხილავთ მათემატიკური სტატისტიკის ძირითად მოთხოვნებს, როგორიცაა ძალმოსილება, ცდომილების ზღვარითი ხასიათი, კრებადობის ოპტიმალურობა და სხვა.

საზოგადოდ ამოცანა ასე ისმება: ვთქვათ X შემთხვევითი სიდიდეა $\{\Omega,\Im,P\}$ ალბათურ სივრცეზე, მნიშვნელობებით R-ში. დავუშვათ, რომ ცნობილია ფაქტი იმის შესახებ, რომ ამ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F(x)=P\{X<x\}$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი ლებეგის ზომის მიმართ და შესაბამისად არსებობს ალბათური განაწილების სიმკვრივე $f(x)=F'(x)$. მაგრამ ამ სიმკვრივის სახე ჩვენთვის უცნობია. საჭიროა გარკვეული პროცედურების საშუალებით შეფასებულ იქნეს სიმკვრივის ფუნქცია.

ვთქვათ მოცემულია შესასწავლ შემთხვევით სიდიდეზე დამოუკიდებელი დაკვირვებები. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემულია ერთმანეთისაგან (ალბათური თვალსაზრისით) დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა X_1, X_2, , X_n, რომელთაგან თითოეული განაწილებულია ისე, როგორც X შემთხვევითი სიდიდე. ამ მონაცემების საფუძველზე უნდა აიგოს $f(x)$ ფუნქციის შეფასება.

პარამეტრული შეფასებებისას შესაძლებელია ჩვენთვის ცნობილი იყოს $f(x)$ ფუნქციის სახე $\{f(\cdot;\theta)\,|\,\theta\in\Theta\}$ უცნობი პარამეტრის სიზუსტით. ეს უცნობი პარამეტრი შესაძლებელია იყოს ვექტორული სახის $\theta\in\Theta\subseteq R^k$. ამ შემთხვევაში ვუშვებთ, რომ ნამდვილი სიმკვრივე ტოლია $f=f(\cdot;\theta_0)$ რაღაც $\theta_0\in\Theta-$სათვის. ასეთი სქემის სტანდარტული მაგალითია ნორმალურად განაწილებილი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევა. გვექნება

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{1.1}$$

და $\theta=(\mu,\sigma^2)$. კარგადაა ცნობილი (იხ. მაგ. [2]), რომ ამ შემთხვევაში სიმკვრივის შეფასება არის $\hat{f}=f(\cdot;\hat{\theta})$ სადაც

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta}\left[-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(X_i,\theta)\right]. \qquad (1.2)$$

ცნობილია, აგრეთვე, რომ $\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta_0)\xrightarrow{d} N(0,H_0^{-1})$, სადაც $H_0 = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X,\theta_0)\right)$. აქედან თავის მხრივ გამომდინარეობს

$$\sqrt{n}\left(\hat{f}(x)-f(x)\right)\xrightarrow{d} N(0,V_0(x)H_0^{-1}V_0(x)), \qquad (1.3)$$

სადაც $V_0(x)=\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta_0)$. აქ და ყველგან ქვემოთ $\xrightarrow{d}$ აღნიშნავს კრებადობას განაწილების თვალსაზრისით.

ასე, რომ თუ დავუშვებთ განაწილების სიმკვრივის კონკრეტული სიმკვრივეების კლასისათვის მიკუთვნების ჰიპოთეზას, ვღებულობთ საკმაოდ კარგ შეფასებებს. ეს პარამეტრული შეფასებების სტანდარტული სურათია. მაგრამ თუ $f\in\{f(\cdot;\theta)\,|\,\theta\in\Theta\}$ დაშვების სპეციალური პირობები არ გაგვაჩნია, მაშინ აღნიშნული მეთოდის გამოყენებით შეიძლება დაუშვებელი ცდომილება მივიღოთ. საზოგადოდ გვექნებოდა

$$\sqrt{n}\left(\hat{f}(x)-f(x,\bar{\theta})\right)\xrightarrow{d} N\left(0,\bar{V}(x)\bar{H}^{-1}\bar{\Omega}\bar{H}^{-1}\bar{V}(x)\right),$$

სადაც

$$\bar{\theta}=\arg\min_{\theta\in\Theta}\int_{R^k}\ln f(x;\theta)f(x)dx\,,\quad f(x;\bar{\theta})\neq f(x)\quad \text{პირობაში},$$

და

$$\bar{\Omega}=E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\bar{\theta})\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X;\bar{\theta})\right],$$

$$\bar{H}=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\bar{\theta})\right],\qquad \bar{V}(x)=\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\bar{\theta}).$$

წარმოქმნილ პრობლემას არ შველის სიმკვრივის შესაძლებელი კლასის გადართოება. ამოცანას შეიძლება არასდროს ჰქონდეს ამონახსენი $f\notin\{f(\cdot;\theta)\,|\,\theta\in\Theta\}$ პირობაში. საჭიროა პრინციპულად განსხვავებული, ძლიერი მეთოდების გამოყენება, იმისათვის, რომ შეირჩეს შესაფასებელი სიმკვრივე კონკრეტული დასაშვები კლასის გარეშე.

ამიტომ ჩვენ ვტოვებთ პარამეტრული შეფასებების კლასს და ვანვითარებთ არაპარამეტრული შეფასებების მეთოდიკას. ეს მეთოდიკა გამოდგება სიმკვრივეთა ფართე კლასისათვის და ის დამოუკიდებელია ყოველგვარი პარამეტრების დატვირთვისაგან. ჩვენთვის მთავარია არაპარამეტრული სტატისტიკური შეფასებების კლასიდან ე. წ. გულოვანი შეფასებების მეთოდიკის განვითარება. პრაქტიკამ აჩვენა ასეთი მიდგომის ეფექტურობა და ზოგადი ხასიათი.

1. 2. გულოვანი შეფასებები

ვთქვათ X_1, X_2, , X_n ერთმანეთისაგან (ალბათური თვალსაზრისით) დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა, ანუ მოცემულია შერჩევა.

ერთგანზომილებიან შემთხვევაში ემპირიული განაწილების ფუნქცია ასე განიმარტება

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \chi\{X_i \le x\}, \tag{1.4}$$

სადაც სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია (ინდიკატორი) ასე განისაზღვრება

$$\chi\{X_i \le x\} = 0, \text{ თუ } X_i > 0 \text{ და } \chi\{X_i \le x\} = 1, \text{ თუ } X_i \le 0.$$

ცენტრალური ზღვარითი თეორემის თანახმად მოცემული მიმდევრობისათვის გვაქვს

$$\sqrt{n}\left(\hat{F}(x) - F(x)\right) \xrightarrow{d} N\left(0, F(x)(1 - F(x))\right).$$

ცხადია ემპირიული განაწილების ფუნქცია არის თეორიული განაწილების ფუნქციის არაპარამეტრული შეფასება. ჩვენი მიზანია ასეთი ტიპის შეფასებათა თეორია ავაგოთ განაწილების სიმკვრივისათვის.

ალბათური განაწილების სიმკვრივე არის, როგორც ცნობილია, განაწილების ფუნქციის წარმოებული

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x + h/2) - F(x - h/2)}{h}.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სიმკვრივის შეფასება, საჭიროა ამ ზღვარში ჩავსვათ ემპირიული ფუნქცია. მივიღებთ

$$\hat{f}(x) = \frac{\hat{F}(x + h/2) - F(x - h/2)}{h} = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\chi\left\{x - h/2 < X_i \le x + h/2\right\}.$$

ეს გამოსახულება განსაზღვრულია დადებითი, მაგრამ მცირე h-სათვის. მას ზღვარი არ გააჩნია, რადგან მარჯვენა გამოსახულება წყვეტადი ფუნქციაა. ამიტომ აღებული ფორმით შემოღებული განსაზღვრა არაკორექტული იქნება. იმისათვის, რომ გასაგები გახდეს რა ფორმით შევაფასოთ სიმკვრივე, წინა გამოსახულება ასე გადავწეროთ

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x)}{h}\right), \tag{1.5}$$

სადაც

$$K(x) = \chi\left\{-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}\right\}. \tag{1.6}$$

არის $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივე. ეს შეფასება წყვეტილია და მისი პირდაპირი გამოყენება ჩვენი მიზნებისათვის არ შეიძლება. მაგრამ თუ (1.6) ფუნქციას გავაგლუვებთ და ისე შევარჩევთ, რომ ის უახლოვდებოდეს აღებულ ინდიცატორს, თანაც აკმაყოფილებდეს სიმკვრივისათვის დამახასიათებელ სტანდარტულ პირობებს, მაშინ ჩნდება შანსი იმისა, რომ შევძლოთ ავაგოთ საძებნი შეფასება.

(1.5) გამოსახულებაში $K(x)$ ფუნქციას გული ეწოდება, ხოლო თვით ამ შეფასებას გულოვანი შეფასება. ამ შეფასებაში h სიდიდე შეგვიძლია რიცხვითი მიმდევრობის წევრებით შევცვალოთ, თანაც ისეთი მიმდევრობა ავიღოთ, რომ $h_n \to 0$, როცა $n \to \infty$. მაშინ h_n-ის შემცირებასთან ერთად $K(\frac{x}{h_n})$ ფუნქციის არგუმენტი სულ უფრო იზრდება. თუკი (1.5) განვიხილავთ, როგორც ჰისტოგრამას, მაშინ ჩვენი არჩეული ფუნქცია იქნება ამ ჰისტოგრამის უწყვეტი მიახლოება და n-ის ზრდასთან ერთად ის სულ უფრო დაემსგავსება ამ ჰისტოგრამას.

სიმკვრივის შეფასებისათვის გულის როლში შეიძლება მრავალი სხვადასხვა ფუნქცია ავიღოთ. სტანდარტული მაგალითი ასეთი გულისა არის ნორმალური სიმკვრივე: $K(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$. შესაძლებელია აგრეთვე სხვა თვისებების მქონე ფუნქციების აღება. მათ შორის ისეთიც, რომლებსაც კომპაქტური მატარებელი გააჩნია. ასეთი ფუნქციებისათვის გამოთვლები მარტივდება. თანაც გამოთვლებში მონაწილეობას მიიღებენ მხოლოდ ის წევრები შერჩევიდან, რომლებიც ხვდებიან ამ მატარებლის შიგნით (დანარჩენებზე მოცემული სიმკვრივე უბრალოდ ნულის ტოლია). თუმცა n-ის ზრდასთან ერთად ფართოვდება ეს სიმრავლე და სულ უფრო მეტი და მეტი წევრები მიიღებენ მონაწილეობას შეფასების გამოანგარიშებისას. ეს გვაძლევს საშუალებას ვივარაუდოთ, რომ ზღვარითი პროცესი უფრო ინფორმაციული იქნება და შეფასებაც ზუსტი გამოვა. მეორეს მხრივ n-ის ზრდასთან ერთად მოსალოდნელია ვარიაციის (დისპერსიის) ზრდა, რაც არასასურველი მომენტია იმიტომ, რომ შეფასება მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა ვარიაცია.

ყველაფერი ამის გათვალისწინებით ვასკვნით, რომ სიმკვრივის შეფასების პროცესში გულის შერჩევას, ამ გულისათვის მიმდევრობის არჩევას აქვს დიდი მნიშვნელობა. ყველაფერი ისე დაბალანსებულად უნდა მოხერხდეს, რომ შეფასების ვარიაცია არ გახდეს ზღვარში უსასრულობის ტოლი როცა $n \to \infty$.

1.3. შეფასებათა ზოგიერთი თვისება

ეს პარაგრაფი მოსამზადებელი ხასიათისაა. აქ დავამტკიცებთ რამოდენიმე თვისებას, რომლებსაც შემდეგ გამოვიყენებთ შეფასებათა ძალმოსილებისა და ზღვარითი პროცედურების დასამტკიცებლად.

ლემა 1.3.1. *ვთქვათ მოცემულია მრავალი ცვლადის ფუნქციები $L(x): R^n \to R$ და უწყვეტი $g(x): R^n \to R$, თანაც შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1. $\int_{R^n} |L(x)| dx < \infty$,

2. $\|x\|^n |L(x)| \to 0$, *როცა* $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \to \infty$,

3. $\int_{R^n} |g(x)| dx < \infty$.

მაშინ

$$g_h(x) := \frac{1}{h^n} \int_{R^n} g(z) L\left(\frac{z-x}{h}\right) dz \to g(x) \int_{R^n} L(z) dz, \quad \text{როცა} \quad h \to 0,$$

თუ $g(x)$ *თანაბრად უწყვეტია, მაშინ კრებადობას თანაბარი ხასიათი გააჩნია.*

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა $u = \dfrac{z-x}{h}$. მაშინ

$$g_n(x) - g(x) \int_{R^n} L(z) dz = \int_{R^n} \{g(x+uh) - g(x)\} L(u) du = I_1 + I_2,$$

სადაც I_1-ით და I_2-ით აღნიშნულია შემდეგი ინტეგრალები

$$I_1 = \int_{\{u: \|uh\| < \varepsilon\}} \{g(x+uh) - g(x)\} L(u) du; \quad I_2 \int_{\{u: \|uh\| \geq \varepsilon\}} \{g(x+uh) - g(x)\} L(u) du, \quad (\varepsilon > 0).$$

გვექნება

$$|I_1| \leq \sup_{\|v\| < \varepsilon} |g(x+v) - g(x)| \cdot \int_{\{u: \|uh\| < \varepsilon\}} |L(u)| du \leq \sup_{\|v\| < \varepsilon} |g(x+v) - g(x)| \cdot \int_{R^n} |L(u)| du,$$

საიდანაც ვხედავთ, რომ პირველი თანამარავლი მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $\varepsilon \to 0$, რადგან პირობის თანახმად $g(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა.

მეორე წევრი ასე ჩავწეროთ

$$|I_2| \leq \int_{\{u: \|uh\| \geq \varepsilon\}} |g(x+uh)| \cdot |L(u)| du + |g(x)| \cdot \int_{\{u: \|uh\| \geq \varepsilon\}} |L(u)| du = I_{2,1} + I_{2,2},$$

საიდანაც ჩავწერთ შემდეგ შეფასებებს

$$\left|I_{2,1}\right| \le \left\{ \sup_{\|z\|\ge\frac{\varepsilon}{h}} \|z\|^n |L(z)| \right\} \cdot \int_{\left\{u:\|u\|\ge\frac{\varepsilon}{h}\right\}} \|u\|^{-n} |g(x+uh)| du \le (\sup_{\|z\|\ge\frac{\varepsilon}{h}} \|x\|^n |L(z)|) \frac{h^n}{\varepsilon^n} \int_{R^n} |g(z)| dz \to 0 ,$$

როცა $h \to 0$, ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის.

ბოლოს 2. პირობის ძალით $I_{2,2}$ მისწრაფის ნულისაკენ თანაბრად, როცა $\varepsilon \to 0$. ლემა დამტკიცებულია.

შემდეგი მსჯელობებისათვის შემოვიღოთ მულტიინდექსის ცნება. ვთქვათ $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in N_0^n$ არააუარყოფითი მთელი რიცხვებისაგან შედგენილი ვექტორია. მას მულტიინდექსი ეწოდება. მისთვის $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ და $\frac{\partial^\alpha g(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} g(x)}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_n}}$.

ლემა 1.3.2. *ვთქვათ $K : R^n \to R$ გულისათვის და $g(x) : R^n \to R$ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:*

1. $\int_{R^n} K(x)dx = 1$,

2. $\int_{R^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} K(x)dx = 0$, *ყოველი* α*-სათვის, რომლისთვისაც* $0 < |\alpha| < r$,

3. $\int_{R^n} \|x\|^r K(x)dx < \infty$,

4. $\int_{R^n} \left| \frac{\partial^\alpha g(x)}{\partial x^\alpha} \right| dx < \infty$, *როცა* $|\alpha| = r$.

მაშინ $g_n(x) = \frac{1}{h} \int_{R^n} g(z) K\left(\frac{z-x}{h}\right) dz$ *ფუნქცია აკმაყოფილებს ტოლობას*

$$g_n(x) = g(x) + \frac{h^r}{r!} \sum_{|\alpha|=r} \frac{\partial^\alpha g(x)}{\partial x^\alpha} \cdot \int_{R^n} z^\alpha K(z)dz + o(h^r) ,$$

სადაც $z^\alpha = \prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha_i}$. *ხოლო თუ* $g(x)$ *თანაბრად უწყვეტია* R^n*-ზე, მაშინ კრებადობა თანაბარი ხასიათისაა.*

დამტკიცება. სიმარტივის მიზნით, ჩვენ დამტკიცებას ჩავატარებთ იმ შემთხვევისათვის, როცა $n = 1$. ზოგადი სიტუაცია არ განსხვავდება, ტექნიკურად, ამ დამტკიცებისაგან. გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა

$$g(x+uh) - g(x) = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i g(x)}{\partial x^i} (uh)^i + \frac{1}{r!} \frac{\partial^r g(x^*)}{\partial x^r} (uh)^r ,$$

რომელიც სამართლიანია ყოველი $u \in R$-სათვის. ამ გამოსახულებაში $x^* = x + \lambda uh$, რომელიღაც $\lambda = \lambda(h) \in [0,1]$. მაშინ

$$g_n(x) - g(x)\int_R K(z)dz = \int_R \{g(x+uh) - g(x)\}K(u)du = \int_R \left\{\sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{i!}\frac{\partial^i g(x)}{\partial x^i}(uh)^i + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r!}\frac{\partial^r g(x^*)}{\partial x^r}(uh)^r \right\} K(u)du = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{r!}\frac{\partial^i g(x)}{\partial x^i}(uh)^i + \frac{1}{r!}h^r \int_R \frac{\partial^r g(x^*)}{\partial x^r} u^r K(u)du .$$

ამ ჯამის თითოეული $r-1$ წევრი უდრის ნულს პირობის თანახმად, ხოლო

$$\int_R \frac{\partial^r g(x^*)}{\partial x^r} u^r K(u)du = \frac{1}{h}\int_R \tilde{g}(z) L\left(\frac{z-x}{\tilde{h}}\right)du ,$$

სადაც $\tilde{g}(x) = \dfrac{\partial^r g(x)}{\partial x^r}$, $L(u) = u^r K(u)$ და $\tilde{h} = \lambda h$. რადგან $|z|\left|L(z)\right| \to 0$, როცა $|z| \to \infty$ და $\tilde{g}(x)$ უწყვეტია, თანაც $\int_R |\tilde{g}(z)|dz < \infty$, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლემა 1.3.1, რაც ამტკიცებს ამ ლემას.

ლემა 1.3.3. *ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1. $K : R^m \to R$ *ფუნქციისათვის* $\int_{R^m} K^2(z)dz < \infty$ *და* $\|z\|^m K^2(z) \to 0$, *როცა* $|z| \to \infty$.

2. სიმკვრივის ფუნქცია $f : R^n \to R$ *უწყვეტია.*

3. უწყვეტი $g : R^m \to R$ *ფუნქციისათვის* $E\|g(z)\|^2 = \int_{R^m} \|g(z)\|^2 f(z)dz < \infty$.

მაშინ

$$Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\frac{1}{h}K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)\right] = \frac{1}{nh^m} f(x)g^2(x)\int_{R^m} K^2(z)dz + o\left(\frac{1}{nh^m}\right).$$

დამტკიცება. გავიხსენოთ, რომ შემთხვევითი სიდიდეები (შერჩევის წევრები) ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელნი და ერთნაირად განაწილებულნი არიან. ამიტომ

$$Var\left[\frac{1}{nh^m}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)\right] = \frac{1}{nh^{2m}}Var\left[g(X)K\left(\frac{X-x}{h}\right)\right] = \frac{1}{nh^{2m}}E\left[g^2(X)K^2\left(\frac{X-x}{h}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{h^m}E\left[g(X)K\left(\frac{X-x}{h}\right)\right]\right\}^2 = \frac{1}{nh^m}A_1 + \frac{1}{n}A_2^2 .$$

აღნიშნული წევრებისათვის გვექნება

$$A_1 = \frac{1}{h^m} \int_{R^m} f(z) g^2(z) K^2\left(\frac{z-x}{h}\right) dz = f(x) g^2(x) \int_{R^m} K^2(z) dz + o(1),$$

$$A_2 = \frac{1}{h^m} \int_{R^m} f(z) g(z) K\left(\frac{z-x}{h}\right) dz = f(x) g(x) \int_{R^m} K(z) dz + o(1),$$

საიდანაც ლემა 1.3.1-ს გამოყენებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $n^{-1} = o((nh^m)^{-1})$ ვღებულობთ დასამტკიცებელს.

1.4. ძირითადი თეორემა

რა თქმა უნდა გული არ შეიძლება იყოს ნებისმიერად მოცემული. ჩამოვთვალოთ ის პირობები, რომელთა შესრულებასაც ჩვენ მოვითხოვთ. ვთქვათ $K: R \to R$.

K 1. $\int_R K(x) dx = 1$;

K 2. ყოველი α-სათვის, როცა $\alpha = 1, \ldots, r-1$ გვაქვს $\int_R z^\alpha K(z) dz = 0$, მაგრამ $\int_R |z| K(z) dz < \infty$;

K 3. $k_2 = \int_R K^2(z) dz < \infty$;

K 4. $|K(y) - K(x)| < C|x-y|$, რაღაც $C > 0$ რიცხვისათვის;

K 5. $\int_R |K(z)|^{2+\delta} dz < \infty$, სადაც $\delta > 0$.

რა თქმა უნდა ბევრი შედეგი არ ითხოვს ერთდროულად ყველა მოთხოვნის შესრულებას, მაგრამ სიმარტივისათვის ჯერ-ჯერობით მოვითხოვოთ, რომ $K1$ - $K5$ პირობები სრულდება.

ასე, რომ ვთქვათ X_1, X_2, $,X_n$ ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა (შერჩევაა). მათ გააჩნიათ ალბათური განაწილების სიმკვრივე $f(x)$, რომლის სახე ჩვენთვის უცნობია. შერჩევის საფუძველზე უნდა ავაგოთ ამ სიმკვრივის შეფასება.

დასმული ამოცანისათვის ვიყენებთ გულოვანი შეფასებას. ავიღოთ რაღაც $K(x)$ ფუნქცია, რომელიც ზემოთ ჩამოთვლილ $K1$ - $K5$ პირობებს აკმაყოფილებს. ვთქვათ $h = h_n$ დადებითი რიცხვთა მიმდევრობაა, თანაც ნულისაკენ კრებადი. სიმკვრივის შეფასებას ასეთი სახით ჩავწერთ

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right). \tag{4.1.7}$$

იმისათვის, რომ ძალდებულება ვაჩვენოთ ასეთი შეფასებისას შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია იგივობა

$$E\left[|\hat{f}(x) - f(x)|^2\right] = \left(Bias(\hat{f}(x)\right)^2 + Var(\hat{f}(x)),$$

სადაც აღნიშნულია $Bias(\hat{f}(x) = E\hat{f}(x) - f(x)$ და $Var(\hat{f}(x)) = E\hat{f}^2(x) - (E\hat{f}(x))^2$.

თეორემა 1.4.1. *ვთქვათ სიმკვრივე* $f(x)$ *უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო* $K: R \to R$ *აკმაყოფილებს* $K1$, $K2$ *და* $K3$ *პირობებს. მაშინ*

$$Bias(\hat{f}(x)) = o(1), \tag{1.8}$$

$$Var(\hat{f}(x)) = \frac{1}{nh} f(x)\int_R K^2(z)dz + o\left(\frac{1}{nh}\right), \tag{1.9}$$

ამასთან როცა $h \to 0$ *და* $nh \to \infty$, $\hat{f}(x) \xrightarrow{P} f(x)$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ

$$E\hat{f}(x) = \frac{1}{h}EK\left(\frac{X - x}{h}\right) = \frac{1}{h}\int_R K\left(\frac{z - x}{h}\right)f(z)dz,$$

ამიტომ ლემა 1.3.1-ის თანახმად $Bias(\hat{f}(x)) = E\hat{f}(x) - f(x) \to 0$, როცა $h \to 0$. ამით (1.8) დამტკიცებულია. (1.9)-ის დასამტკიცებლად ჩავწეროთ

$$Var(\hat{f}(x)) = Var\left(\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)\right) = \frac{1}{nh} f(x)\int_R K^2(z)dz + o\left(\frac{1}{nh}\right).$$

აქ ბოლო ტოლობის მისაღებად ლემა 1.3.3 –ია გამოყენებული. თეორემა დამტკიცებულია.

ჩვენ ვაჩვენეთ L_2 კრებადობა, რომელიც უფრო ძლიერია, ვიდრე ალბათური კრებადობა.

თეორემა 1.4.2. *ვთქვათ სიმკვრივე* $f(x)$ *თანაბრად უწყვეტია, ხოლო* $K:R\to R$ *გული აკმაყოფილებს პირობებს. მაშინ*

$$\int_R \left|\hat f(x)-f(x)\right|^2 f(x)dx \xrightarrow{P} 0 .$$

დამტკიცება. ჩავწეროთ

$$E\left[\int_R \left|\hat f(x)-f(x)\right|^2 f(x)dx\right]=\int_R Bias\left(\hat f(x)\right)^2 f(x)dx+\int_R Var\left(\hat f(x)\right)f(x)dx ,$$

საიდანაც ლემა 1.3.1-ის თანახმად

$$\int_R Bias\left(\hat f(x)\right)^2 f(x)dx=o(1)\int_R f(x)dx=o(1)$$

და

$$\int_R Var\left(\hat f(x)\right)f(x)dx\le \frac{1}{nh}\int_R f^2(x)dx\int_R K^2(x)dx=O\left(\frac{1}{nh}\right).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ეს შედეგი შეიძლება იყოს გაძლიერებული თანაბრად კრებადობის თვალსაზრისით. ეს არის კრებადობა ნორმით $\left\|\hat f-f\right\|_\infty=\sup_{x\in R}\left|\hat f(x)-f(x)\right|$.

თეორემა 1.4.3. *ვთქვათ სიმკვრივე თანაბრად უწყვეტია და* $\int_R |x|f(x)dx<\infty$, *ხოლო* $K:R\to R$ *გული აკმაყოფილებს* $K1$, $K2$, $K3$ *და* $K4$ *პირობებს. მაშინ როცა* $h\to 0$ *და* $\frac{nh}{\ln n}\to\infty$ *გვექნება*

$$\left\|\hat f-f\right\|_\infty\to 0 .$$

დამტკიცება. ჩავწეროთ

$$\left\|\hat f-f\right\|_\infty\le\left\|\hat f-E\hat f\right\|_\infty+\left\|E\hat f-f\right\|_\infty .$$

ლემა 1.3.1-ის თანახმად $\left\|E\hat f-f\right\|_\infty=o(1)$. პირველი შესაკრების შესაფასებლად ის ასე წარმოვადგინოთ

$$\sup_{x\in R}\left|\hat f(x)-E\hat f(x)\right|\le\sup_{x\in B_n}\left|\hat f(x)-f(x)\right|+\sup_{x\in B_n^c}\left|\hat f(x)-E\hat f(x)\right|, \tag{1.10}$$

სადაც $B_n = \{x \in R : |x| \le n^{\gamma}\}$, რაღაც ფიქსირებული $\gamma > 0$ რიცხვისათვის. ყოველი n-სათვის შევარჩიოთ ისეთი წერტილები $\{x_{n,j} \mid j = 1,\dots,\nu_n\}$, რომ B_n სიმრავლე დაიფაროს $B_{n,j} = \left\{x \in R \mid |x - x_{n,j}| \le \dfrac{n^{\gamma}}{\nu_n}\right\}$ სიმრავლეებით: $B_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\nu_n} B_{n,j}$. მაშინ

$$\sup_{x \in B_n} \left| \hat{f}(x) - E\hat{f}(x) \right| \le \max_{j=1,\dots,\nu_n} \sup_{x \in B_{n,j}} \left| \hat{f}(x) - E\hat{f}(x) \right|.$$

მეორეს მხრივ, როცა $x \in B_{n,j}$ გვექნება

$$\left| \hat{f}(x) - E\hat{f}(x) \right| \le \left| \hat{f}(x) - \hat{f}(x_{n,j}) \right| + \left| \hat{f}(x_{n,j}) - E\hat{f}(x_{n,j}) \right| + \left| E\hat{f}(x_{n,j}) - E\hat{f}(x) \right|.$$

აქ თეორემის პირობის ძალით ჩავწერთ

$$\left| \hat{f}(x) - \hat{f}(x_{n,j}) \right| \le \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \left| K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) - K\left(\frac{X_i - x_{n,j}}{h}\right) \right| \le C \frac{|x - x_{n,j}|}{h^2} \le C \frac{n^{\gamma}}{h^2 \nu_n},$$

და

$$\left| E\hat{f}(x_{n,j}) - E\hat{f}(x) \right| \le C \frac{n^{\gamma}}{h^2 \nu_n}, \quad \text{რაღაც } C > 0 \text{ რიცხვისათვის.}$$

აქ შეფასებისათვის გამოვიყენოთ ლიტერატურაში კარგად ცნობილი უტოლობა: ყოველი $x \in R$ და $\gamma > 1$ რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა (იხ, [4]):

$$P\left(\left| \hat{f}(x) - E\hat{f}(x) \right| > \gamma \right) \le C \exp\left[-\gamma \sqrt{nh} \right].$$

ამ უტოლობის გამოყენება ჩვენს შემთხვევაში გვაძლევს

$$P\left(\max_{j=1,\dots,\nu_n} \left| \hat{f}(x_{n,j}) - E\hat{f}(x_{n,j}) \right| > \gamma \right) \le \sum_{j=1}^{\nu_n} P\left(\left| \hat{f}(x_{n,j}) - E\hat{f}(x_{n,j}) \right| > \gamma \right) \le \nu_n e^{-\gamma \sqrt{nh}}.$$

ჩვენი შესაფასებელი ჯამების კრებადობისათვის, მაშასადამე, გვესაჭიროება, რომ $\dfrac{n^{\gamma}}{h^2 \nu_n} \to 0$ და $\nu_n \exp\left[-\gamma \sqrt{nh} \right] \to 0$. ამის მიღწევა კი შესაძლებელია $\nu_n = n^{\gamma} h^2 \ln n$-ის არჩევით. ბოლოს შევნიშნავთ, რომ $\sup_{|x| > n^{\gamma}} f(x) \to 0$ და $\sup_{|x| > n^{\gamma}} \left| \hat{f}(x) \right| \xrightarrow{P} 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

1.5. გლუვი სიმკვრივეების შეფასება და აგება

ზემოთ თეორემა 1.4.1-ში ჩვენ ვნახეთ, რომ $\hat{f}(x)$-ის გადახრა (bias) არის $o(1)$ რიგის. ამ შედეგის რედუცირება შესაძლებელია ისეთი გულებისათვის, რომლებსაც სიგლუვის მაღალი ხარისხი გააჩნიათ. დავუშვათ $f(x)$ სიმკვრივე არის r-ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი და $\int_R \left|\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r}\right| dx < \infty$. ავიღოთ ისეთი K გული, რომლისთვისაც $K\,2$ პირობა სრულდება მოცემული r-სათვის. მაშინ ლემა 1.3.1-ის თანახმად მივიღებთ

$$E\hat{f}(x) = f(x) + \frac{h^r}{r!}\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r}\int_R z^r K(z)dz + o(h^r). \tag{1.11}$$

ამ პირობებში ჩვენ მოვახერხებთ ვარიაციის შემცირებას და მისი რიგი იქნება $O(h^r)$.

გარდა აღნიშნულისა $K\,2$ პირობიდან გამომდინარე, თეორიულად, ისიც კი არის შესაძლებელი, რომ გული ავირჩიოთ არა აუცილებლად დადებითი. მას შეეძლება ზოგიერთ უბანზე უარყოფითია მნიშვნელობების მიღებაც. ასეთი შესაძლებლობა სიმკვრივეების შემთხვევაში არაა სასურველი, თუმცა ზოგიერთ შემთხვევაში (მაგალითად, ეკონომეტრიულ ამოცანებში) ეს სავსებით დასაშვებია.

ვთქვათ საკმარისად გლუვი გული აკმაყოფილებს $K\,2$ პირობას $r \le 1$ რიცხვისათვის. ვთქვათ ეს გულია $K^*(x)$. მისი საშუალებით განვმარტოთ ახალი გული ასეთი ტოლობით

$$K(x) = K^*(x)\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r\right).$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ

$$\int_R K^*(x)dx = 1 \quad \text{და} \quad k_i^* = \int_R z_i K^*(z)dz\,, \quad i = 1,\ldots,2r$$

სიდიდეები განსაზღვრულნი არიან ცალსახად. მაშინ $K(x)$ გულიც დააკმაყოფილებს $K\,2$ პირობას, თუკი

$$a_0 + a_1 k_1^* + a_2 k_2^* + \ldots + a_r k_r^* = 1\,;$$

$$a_0 k_1^* + a_1 k_2^* + a_2 k_3^* + \ldots + a_r k_r^* = 0\,;$$

. . . .

$$a_0 k_{r-1}^* + a_1 k_r^* + a_2 k_{r+1}^* + \ldots + a_r k_{2r-1}^* = 0\,.$$

მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას a_0, a_1, , a_r ცვლადების მიმართ, რომლის ამოხსნის შემდეგ ჩვენ მივიღებთ ახალ გულს, რომელსაც ისეთივე სიგლუვე ექნება, როგორიც თავიდან აღებულ გულს.

1.6. კრებადობის რიგის შესახებ

ძირითადი თეორემა ძალდებულობის შესახებ, არაფერს ამბობს კრებადობის ხასიათის შესახებ. ამ საკითხის გამოკვლევა შესაძლებელია გლუვი გოლების საშუალებით.

ვთქვათ $f(x)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო $K(x)$ აკმაყოფილებს $K\ 2$ პირობას $r = 2$ -სათვის. შევაფასოთ საშუალო კვადრატული გადახრა h მიმდევრობისაგან დამოკიდებულებაში.

$$MSE(x;h) = E\left[\left|\hat{f}(x) - f(x)\right|^2\right] = \frac{1}{4}B_1(x)h^4 + B_2(x)\frac{1}{nh} + o(h^4) + o(\frac{1}{nh}) , \qquad (1.12)$$

სადაც

$$B_1(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right)^2 k_2^2, \quad B_2(x) = f(x)\int_R k_2^2(z)dz , \quad k_2 = \int_R z^2 K(z)dz .$$

მოვითხოვოთ, რომ $h \to 0$ და $nh \to \infty$. ასეთი მიმდევრობები მრავალია. ისმება კითხვა: რომელია ამ მიმდევრობებიდან ის, რომლის დროსაც ადგილი ექნება მაღალი კლასის კრებადობას? ცხადია ეს მაშინ მოხდება, როცა (1.12) ფორმულის მარჯვენა მხარეში პირველი ორი მთავარი წევრები აღწევენ მინიმუმს. ასე, რომ

$$\frac{\partial\left[B_1(x)\dfrac{h^4}{4} + \dfrac{B_2(x)}{nh}\right]}{\partial h} = B_1(x)h^3 - \frac{1}{nh^2}B_2(x) = 0 .$$

აქედან მივიღებთ

$$h_x^* = \left(\frac{B_2(x)}{B_1(x)} \right)^{1/5} n^{-1/5}. \qquad (1.13)$$

ასეთნაირად შერჩეულ მიმდევრობას ოპტიმალური ეწოდება. თუ (1.12)-ში ჩავსვამთ (1.13)-ს მივიღებთ

$$MSE\left((x; h_x^*\right) = \frac{5}{4} C(K) \frac{\left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right]^{2/5}}{\left[f(x) \right]^{1/5}} n^{-\frac{4}{5}} + o(n^{-\frac{4}{5}}), \qquad (1.14)$$

სადაც $C(K)$ არის მუდმივი

$$C(K) = k_2^{2/5} \left(\int_R K^2(z) dz \right)^{4/5}. \qquad (1.15)$$

შევნიშნოთ, რომ ოპტიმალური h_x^* დამოკიდებულია x-ზე. ამიტომ ყოველ x-ში მისი გამოთვლა რთულია. ამიტომ ისმება საკითხი რაიმე გლობალური შეფასებისა.

ასეთ შეფასებად ავიღოთ

$$IMSE(h) = \int_R E\left[\left| \hat{f}(x) - f(x) \right|^2 \right] dx = \int_R Bias(\hat{f}(x))^2 dx + \int_R Var(\hat{f}(x)) dx.$$

ამ შესაკრებების მინიმიზაცია h-ს მიხედვით მოგვცემს:

$$h^* = \frac{B_2^{1/5}}{B_1^{1/5}} n^{-1/5},$$

სადაც $B_1 = \int_R \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \cdot k_2^2$, $B_2 = \int_R K^2(z) dz$. ასე, რომ

$$IMSE(h^*) = \frac{5}{4} C(K) \left(\int_R \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right)^{1/5} n^{-4/5} + o(n^{-4/5}). \qquad (1.16)$$

მსგავსი შედეგის მიღება შეიძლება იმ შემთხვევაშიც, როცა კრებადობის კრიტერიუმად აღებულია მინიმიზაცია sup ნორმით. ეს პროგრამა რეალიზდება ისევე, როგორც თეორემა 3.4.3 –ის დამტკიცება.

როგორც დავადგინეთ, გულოვანი შეფასება იკრიბება $n^{2/5}$ ხარისხით. პარამეტრული შეფასებებში, როგორც წესი, კრებადობის ხარისხი არის $n^{1/2}$. ამ მოვლენის მიზეზი შეიძლება ვეძებოთ იმაში, რომ ფუნქციის ინტეგრალი აგლუვებს ამ ფუნქციას და მას უფრო კარგად შეფასებად ფუნქციად წარმოადგენს. პირიქით,

ფუნქციის დიფერენცირება აუარესებს ფუნქციის საქციელს და შესაბამისად უფრო რთულად შესაფასებელ სიდიდედ აქცევს. ეს სურათი კარგად ჩანს ამოცანებში, რომლებშიც საჭიროა სიმკვრივის წარმოებულების შეფასება.

დავუშვათ $f(x)$ არის $r \geq 1$-ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი, ხოლო გული $K(x)$ აკმაყოფილებს $K\ 2$ პირობას. წერტილოვანი საშუალო კვადრატული გადახრა ასე ჩავწეროთ

$$MSE(x;h) = \frac{1}{(r!)^2} B_{1,r}(x) h^{2r} + B_2(x)\frac{1}{nh} + o(h^{2r}) + o(\frac{1}{nh}),$$

სადაც $B_{1,r}(x) = \left(\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r}\right)^2 \cdot k_r^2$, $k_r = \int_R z^r K(z) dz$ ხოლო $B_2(x)$ ისეთივეა, როგორც ზევით.

ოპტიმალური მიმდევრობა ამ შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$h_x^* = \left(\frac{(r!)^2}{2r}\frac{B_2(x)}{B_1(x)}\right)^{\frac{1}{2r+1}} \cdot n^{-\frac{1}{2r+1}},$$

ხოლო შესაბამისი საშუალო კვადრატული გადახრა იქნება

$$MSE(x;h_x^*) = \left(\frac{2r}{r!}\right)^{\frac{r}{2r+1}} C_r(K) \frac{\left[\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r}\right]^{\frac{r}{2r+1}}}{\left[f(x)\right]^{\frac{2r}{2r+1}}} n^{-\frac{2r}{2r+1}} + o(n^{-\frac{2r}{2r+1}}), \qquad (1.17)$$

სადაც $C_r(K) = k_r^{\frac{r}{2r+1}}\left(\int_R K^2(z)dz\right)^{\frac{2r}{2r+1}}$. r-ს ზრდასთან ერთად $\frac{2r}{2r+1}$ უახლოვდება 1-ს. ე.ი. კრებადობის ხარისხი იზრდება, როცა სიმკვრივის ფუნქციაზე სიგლუვის მოთხოვნა იზრდება.

1.7. ასიმპტოტიურად ნორმალურობა

შეფასებათა თეორიაში ყოველთვის საინტერესოა როგორია ასიმპტოტიური განაწილება. ჩვენს განსახილველ შემთხვევაში დაგვჭირდება ცენტრალური ზღვარითი თეორემა, რომელსაც აქ მოვიყვანთ.

ვთქვათ მოცემულია ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა სამკუთხა მიმდევრობა $\{U_{n,i}\}$, $i=1,\ldots,n$, $n\ge 1$. აღვნიშნოთ $\mu_n = EU_{n,1}$, $\sigma_n^2 = Var(U_{n,1})$.

თეორემა 7.1. *თუ* $z_n = \dfrac{U_{n,1}-\mu_n}{\sigma_n}$ *ნებისმიერი* $\varepsilon>0$ *რიცხვისათვის აკმაყოფილებს ლინდებერგის პირობას*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[z_n^2 \chi\{|z_n| > \sqrt{n}\varepsilon\}\right] = 0, \qquad (1.18)$$

მაშინ

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{U_{n,1}\mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} N(0,1). \qquad (1.19)$$

(1.18) ლინდებერგის პირობის შესრულებისათვის მოვიყვანოთ ე.წ. ლიაპუნოვის თეორემა.

ლემა 7.1. *საკმარისი პირობა* (1.18) *ტოლობისათვის მდგომარეობს შემდეგში:* $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\delta/2} E\left[z_n^{2+\delta}\right] = 0$*, რომელიღაც* $\delta>0$ *რიცხვისათვის.*

ამ თეორემების გამოყენებით დავამტკიცოთ

თეორემა 7.2. *დავუშვათ, რომ შესრულებულია პირობები:*

1. $f(x)$ *არის ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი და*

$$\int_R \left|\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}\right| dz < \infty;$$

2. $K(x)$ *გული აკმაყოფილებს* $(K\ 1)$-$(K\ 5)$ *პირობებს* $r=2$*-სათვის.*

მაშინ

$$\sqrt{nh}\left(\hat f(x) - f(x)\right) \xrightarrow{d} N\left(0, f(x)\int_R K^2(z)dz\right),$$

როცა $h\to 0$, $nh\to\infty$ *და* $nh^5\to 0$.

დამტკიცება. ცხადია

$$\sqrt{nh}\left(\hat f(x) - f(x)\right) = \sqrt{nh}\left(\hat f(x) - E\hat f(x)\right) + \sqrt{nh}\left(E\hat f(x) - f(x)\right) \qquad (1.20)$$

და გამოვიყენოთ თეორემა 7.1. ამისათვის განვმარტოთ $U_{n,i} = \dfrac{1}{\sqrt{h}} K\left(\dfrac{X_i - x}{h}\right)$. მაშინ

$$\frac{\sqrt{nh}\left(\hat{f}(x)-E\hat{f}(x)\right)}{\sqrt{f(x)\int_R K^2(z)dz}}=\frac{\sigma_n}{\sqrt{f(x)\int_R K^2(z)dz}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{U_{n,i}-\mu_n}{\sigma_n}.$$

თუ $\delta>0$, მაშინ

$$E\left[\left|U_{n,1}\right|^{2+\delta}\right]=\frac{1}{h^{1+\frac{\delta}{2}}}\cdot E\left[\left|K\left(\frac{X_i-x}{h}\right)\right|^{2+\delta}\right]=\frac{1}{h^{\delta/2}}\cdot\frac{1}{h}\int_R\left|K\left(\frac{z-x}{h}\right)\right|^{2+\delta}f(z)dz=$$

$$=\frac{1}{h^{\delta/2}}\left\{f(x)\int_R|K(z)|^{2+\delta}dz+o(1)\right\},$$

და

$$\sigma_n=Var\left(U_{n,1}\right)=Var\left(\frac{1}{h}K\left(\frac{X_i-x}{h}\right)\right)=f(x)\int_R K^2(z)dz+o(1).$$

მაშინ მოიძებნება $C>0$ მუდმივი, ისეთი, რომ

$$n^{-\delta/2}E\left[z_n^{2+\delta}\right]\le Cn^{-\delta/2}\frac{E\left[\left|U_{n,1}\right|^{2+\delta}\right]}{Var\left(U_{n,1}\right)^{1+\delta/2}}=\frac{1}{(nh)^{\delta/2}}\frac{f(x)\int_R K^{2+\delta}(z)dz+o(1)}{\left[f(x)\int_R K^2(z)dz+o(1)\right]^{1+\delta/2}}\to 0,$$

როცა $nh\to\infty$. შევნიშნოთ, რომ $\sqrt{nh}O(h^2)=O(\sqrt{nh^5})=o(1)$, თუ $nh^5\to 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. ვარიაციის ასიმპტოტიკის მთავარი შესაკრები არის $\hat{f}(x)\int_R K^2(z)dz$.

ვთქვათ $x\neq y$. დამოუკიდებლობისა და ერთნაირად განაწილების მოთხოვნებიდან გამოვა

$$Cov\left(\sqrt{nh}\,\hat{f}(x),\sqrt{nh}\,\hat{f}(y)\right)=\frac{1}{h}Cov\left(K\left(\frac{X_1-x}{h}\right)\cdot K\left(\frac{X_1-y}{h}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{h}E\left[K\left(\frac{X_1-x}{h}\right)\cdot K\left(\frac{X_1-y}{h}\right)\right]+o(1),$$

სადაც ჩვენ გვინდა, რომ

$$\frac{1}{h}E\left[K\left(\frac{X_1-x}{h}\right)\cdot K\left(\frac{X_1-y}{h}\right)\right]=o(1).$$

ამის საჩვენებლად ჩავწეროთ

$$\frac{1}{h}E\left[K\left(\frac{X_1-x}{h}\right)K\left(\frac{X_1-y}{h}\right)\right]=\frac{1}{h}\int_R K\left(\frac{z-x}{h}\right)K\left(\frac{z-y}{h}\right)f(z)dz=$$

$$=\int_R K(u)K\left(u+\frac{y-x}{h}\right)f(x+hu)du\,.$$

გავყოთ ეს უკანასკნელი ორ ნაწილად

$$\int_{\left\{|u|<\frac{y-x}{2h}\right\}}|K(u)|\cdot\left|K\left(u+\frac{y-x}{h}\right)\right|\cdot f(x+hu)du\le\left\{\sup_{|u|<\frac{y-x}{2h}}\left|K\left(u+\frac{y-x}{h}\right)\right|\right\}\cdot\int_R|K(u)|\cdot f(x+hu)du\,.$$

შევნიშნოთ, რომ $|u|<\dfrac{y-x}{2h}$ უტოლობა იწვევს $v=u+\dfrac{y-x}{h}>\dfrac{y-x}{2h}$ უტოლობას. ამიტომ

$$\sup_{|u|<\frac{y-x}{2h}}\left|K\left(u+\frac{y-x}{h}\right)\right|\le\sup_{|v|>\frac{y-x}{2h}}\left|K(v)\right|\to0\,,\quad \text{როცა}\quad h\to0\,.$$

გარდა ამისა

$$\int_R|K(u)|\cdot f(x+hu)du\le\sup_{v\in R}f(v)\cdot\int_R|K(u)|\,du\,.$$

მეორე შესაკრებისათვის

$$\int_{\left\{|u|\ge\frac{y-x}{2h}\right\}}|K(u)|\cdot\left|K\left(u+\frac{y-x}{h}\right)\right|\cdot f(x+hu)du\le\left\{\sup_{|u|\ge\frac{y-x}{2h}}|K(u)|\right\}\cdot\int_R\left|K\left(u+\frac{y-x}{h}\right)\right|\cdot f(x+hu)du\le$$

$$\le\left\{\sup_{|u|\ge\frac{y-x}{2h}}|K(u)|\right\}\cdot\sup_{v\in R}f(v)\cdot\int_R|K(z)|\,dz\,,$$

საიდანაც ჩანს, რომ პირველი თანამამრავლი მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $h\to0$.

ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $\{x_i\in R;i=1,\ldots,N\}$ წერტილთა სიმრავლისათვის, როცა $x_i\ne x_j$, $i\ne j$, ადგილი აქვს კრებადობას

$$\sqrt{nh}\left(\begin{bmatrix}\hat f(x_1)\\ \ldots\ldots\ldots\\ \hat f(x_N)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f(x_1)\\ \ldots\ldots\ldots\\ f(x_N)\end{bmatrix}\right)\xrightarrow{d}N\left(0,\int_R K^2(z)dz\cdot diag\left(f(x_1),\ldots,f(x_N)\right)\right).$$

თავი 2

ალბათური განაწილების სიმკვრივის გულოვანი შეფასებები. მრავალგანზომილებიანი შემთხვევა

ჩვენი მიზანია აღვწეროთ, როგორ შეიძლება წინა თავში მოყვანილი შედეგები გადავიტანოთ მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში.

კვადრატული A მატრიცისათვის $|A|$ აღნიშნავს ამ მატრიცის დეტერმინანტს. ავიღოთ $K: R^d \to R$ მრავალი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია და განვსაზღვროთ:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n|H|}\sum_{i=1}^{n} K\left(H^{-1}(X_i - x)\right),$$

სადაც $K: R^d \to R$ მრავალგანზომილებიანი გულია, ხოლო $H \in R^{d\times d}$ დადებითად განსაზღვრული კვადრატული მატრიცაა. $\hat{f}$ აღებული ფორმით წარმოადგენს გულოვანი შეფასებას და მასში H მიმდევრობათა მატრიცაა. ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება ეს მატრიცა ასეთი ფორმით ავირჩიოთ $H = hI_d$, სადაც I_d ერთეულოვანი მატრიცაა. ამ შემთხვევაში

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh^d}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right). \tag{2.1}$$

აღვნიშნოთ, რომ გულს ხშირად ასე ირჩევენ $K(x_1,\ldots,x_d) = \prod_{i=1}^{d} K(x_i)$, სადაც $K: R \to R$ ერთგანზომილებიანი გულია.

მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში $K: R^d \to R$ გულზე გვაქვს რეგულარობის შემდეგი მოთხოვნები:

$K.1.$ $\int_{R^d} K(z)dz = 1$,

$K.2.$ $\int_{R^d} z^{\alpha} K(z)dz = 0$ ნებისმიერი $\alpha \in N_0^{\alpha}$-სათვის, როცა $|\alpha| \le r-1$ და $\int_{R^d} \|z\|^2 K(z)dz < \infty$,

$K.3.$ $k_2 = \int_{R^d} K^2(z)dz < \infty$,

$K.4.$ $\int_{R} |K(z)|^{2+\delta} dz < \infty$, რაღაც $\delta > 0$ რიცხვისათვის.

ჩამოთვლილ პირობებში ძირითადი თვისებები ერთგანზომილებიანი სივრციდან გადადის მრავალგანზომილებიან სივრცეში. სამაგალითოდ მოვიყვანთ ძალმოსილების დამტკიცებას.

თეორემა 2.1. *ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1. K *გული აკმაყოფილებს* $(K.1)-(K.3)$ *პირობებს;*
2. *სიმკვრივე* $f: R^d \to R$ *არის უწყვეტი;*

მაშინ $\hat{f}(x)$ *აკმაყოფილებს პირობებს:*

$$Bias\left(\hat{f}(x)\right) = o(1)\,, \tag{2.2}$$

$$Var\left(\hat{f}(x)\right) = \frac{1}{nh^d} f(x)\int_{R^d} K^2(z)dz + o(\frac{1}{nh^d})\,, \tag{2.3}$$

და

$$\hat{f}(x) \xrightarrow{d} f(x)\,,\ \text{როცა}\ \ h \to 0\ \ \text{და}\ \ nh^{\alpha} \to \infty\,.$$

დამტკიცება. Bias-სა და ვარიაციისათვის ლემა 3.3.1-ის გამოყენებით მიიღება დასამტკიცებელი. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ $f(x)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია და გულიც მეორე ხარისხისაა. ლემა 3.3.2-დან მივიღებთ:

$$Bias\left(\hat{f}(x)\right) = \frac{h^2}{2}\int_{R^d} \nabla f(x;z)K(z)dz + o(h^2)\,,$$

სადაც

$$\nabla f(x;z) = \sum_{i.j=1}^{d} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j\ .$$

ასევე

$$Var\left(\hat{f}(x)\right) = \frac{1}{nh^{\alpha}} f(x)\int_{R^d} K^2(z)dz + o\left(\frac{1}{nh^d}\right).$$

იმისათვის, რომ შევარჩიოთ ოპტიმალური მიმდევრობა გამოვიყენებთ ერთგანზომილებიან შედეგს. მივიღებთ, რომ საუკეთესო შერჩევა, ინტეგრალური საშუალო კვადრატული აზრით იქნება $h^* \approx \frac{B_2}{B_1} n^{-\frac{1}{d+4}}$, სადაც

$$B_1 = \frac{d}{2}\int_{R^d} \nabla f(x;z)K(z)dz \quad \text{და} \quad B_2 = f(x)\left\|K^2\right\|^2.$$

შესაბამისი ინტეგრალური საშუალო გადახრა (IMSE) არის $\sqrt{IMSE(\hat{f};h^*)} \approx C \cdot n^{-\frac{2}{d+4}}$, რაღაც $C > 0$ მუდმივისათვის.

შევნიშნოთ, რომ კრებადობის ხარისხი დამოკიდებულია განზომილებაზე. რაც უფრო მეტია ცვლადების რაოდენობა, მით უფრო დაბალია შესაბამისი გულოვანი შეფასების კრებადობის ხარისხი.

ერთგანზომილებიანი შემთხვევის მსგავსად შეიძლება ვაჩვენოთ ზღვარითი კრებადობა

$$\sqrt{nh}\left(\hat{f}(x)-f(x)\right)\xrightarrow{d} N\left(0, f(x)\int_{R^d} K^2(z)dz\right), \tag{2.4}$$

როცა $h \to 0$, $nh^d \to \infty$ და $nh^{d+4} \to 0$. ეს ფორმულა მიუთითებს იმ ფაქტზე, რასაც ზემოთ ვწერდით კრებადობის ხარისხის შესახებ.

ზოგიერთ შემთხვევაში სივრცის განზომილებისაგან ეს დამოკიდებულება შეიძლება უგულვებელყოფილ იქნას. მაგალითად, ვთქვათ $X_i=\left(X_{i,1},\ldots,X_{i,d}\right)$ და $X_{i,k}$ და $X_{i,j}$ ურთიერთდამოუკიდებელნი არიან ყოველი $k \neq j$-სათვის. ავიღოთ $f(x)=\prod_{k=1}^{d} f_k(x_k)$, სადაც $X_{i,k} \sim f_k$, $k=1,\ldots,d$. გულოვანი შეფასებას ასე ავაგებთ

$$\hat{f}(x_1,\ldots,x_d)=\prod_{k=1}^{d}\hat{f}_k(x_k), \qquad \hat{f}_k(x_k)=\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_{k,i}-x_k}{h}\right),$$

რომლის კრებადობის ხარისხი არის $n^{-2/5}$, რადგანაც ყოველი $\hat{f}_k$ კრებადია ამ სიჩქარით.

2.2. მიმდევრობისა და გულის ოპტიმალური შერჩევის ამოცანა

ჩვენ მოვიყვანეთ ზღვარითი თვისებები გულზე და მიმდევრობაზე მოთხოვნილ გარკვეულ პირობებში. პრაქტიკულ გამოთვლებში ასეთი არჩევა შეიძლება არ იყოს ადვილი. როგორ ავირჩიოთ მიმდევრობა და გული გავარჩიოთ ერთგანზომილებიანი შემთხვევისათვის, რადგან მრავალგანზომილებიანი შემთხვევა ამის ანალოგიურია.

ჩვენ უკვე განვიხილეთ მიმდევრობის ოპტიმალურად ამორჩევის პროცედურა, როგორც ანალიზური ამოცანა და ვნახეთ, რომ ასეთი $h=h_x^*$ შერჩევისას $\hat{f}(x)$-ის კრებადობის ხარისხი, საშუალო კვადრატული გადახრის თვალსაზრისით საუკეთესოა. ვნახეთ, აგრეთვე, რომ საშუალო კვადრატული გადახრა კლებადია, მაშინ, როცა კლებადია (1.13) ფორმულის თანახმად, როცა კლებადია

$C(K)$. მაშასადამე გვინდა ისე შევარჩიოთ $K(x)$, რომ ის იყოს მცირე $C(K)$-ის მსგავსად. მინიმიზაციის ამ ამოცანის ამონახსენია

$$K_e(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\sqrt{5}}\left(1-\dfrac{1}{5}x^2\right), & \text{როცა} \quad |x|<5 \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში}\end{cases}.$$

ეს გული პირველად რუსმა მეცნიერმა ეპანეჩნიკოვმა შემოიღო და მისსავე სახელს ატარებს. მიუხედავად ამისა პრაქტიკაში გულის როლში უფრო ხშირად ნორმალური განაწილების სიმკვრივეს გამოიყენებენ. ამ სიმკვრივეს ყველა რიგის წარმოებული გააჩნია და მრავალი სხვა კარგი თვისებებით გამოირჩევა.

დავუბრუნდეთ მიმდევრობის შერჩევის ამოცანას. თუ როგორ მიმდევრობას ავირჩევთ, სწრაფად კრებადსა, თუ ნელა კრებადს, ამისაგან დამოკიდებულია გულის ლოკალური თვისებები. როდესაც ვირჩევთ ოპტიმალური მიმდევრობას h_x^* ეს იწვევს პრინციპულ სირთულეს, რომელიც დაკავშირებულია იმით, რომ როგორც გამოსაანგარიშებელი ფორმულიდან ჩანს ეს არჩევა დამოკიდებულია უცნობი f სიმკვრივისაგან. ცხადია ამის გამო რიცხვითი მეთოდები არა ეფექტური იქნება.

ასეთი სირთულეს გვერდის ავლა სხვადასხვანაირად ხერხდება. ყველაზე გავრცელებული არის ე. წ. "სილვერმანის ამოწურვის მეთოდი". ამ მეთოდის შესაბამისად ასე ვიქცევით. შევარჩევთ ნებისმიერ ჩვენთვის ცნობილ სიმკვრივეს. მაგალითად გაუსის სიმკვრივეს $f^*(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$. ამის შემდეგ გამოვთვლით აღებულ x წერტილში $f^*(x)$-სა და $\dfrac{\partial^2 f^*(x)}{\partial x^2}$ და (1.13) ფორმულის საშუალებით ვიპოვით ოპტიმალურ მიმდევრობას. თუკი ამის შემდეგ აღმოვაჩენთ, რომ f^* დიდად განსხვავდება f-საგან, მაშინ ავარჩევთ აღებული სიმკვრივისაგან პარამეტრული ოჯახს $f^*(\,\cdot\,,\theta)$, სადაც $\theta\in\Theta$ და დავიწყებთ θ-ს შერჩევას. თუ ეს სიმკვრივე არის ნორმალური განაწილების სიმკვრივე, მაშინ პარამეტრული კლასი იქნება $\left\{\theta=\left(a,\sigma^2\right): a\in R, \sigma>0\right\}$. ამ აზრით ამოცანა დაიყვანება პირველ პარაგრაფში განხილულ პარამეტრული ამოცანაზე.

"ამოწურვის მეთოდის" გასაუმჯობესებლად გარკვეული იტერაციული პროცედურა. დასაწყისისათვის ავიღებთ რომელიმე მიმდევრობას. მას გამოვიყენებთ პირველი გულოვანი შეფასების ასაგებად. თუ ეს გულოვანი შეფასება ჩვენთვის გამოსადეგი იქნება, მაშინ პროცედურა დამთავრებულად ჩაითვლება. წინააღმდეგ შემთხვევაში, გამოთვლილი $f^*(x)$-ის საშუალებით ავაგებთ ახალ "ოპტიმალური" მიმდევრობას და სილვერმანის მეთოდის კიდევ ერთხელ გამოყენებით ავაგებთ ახალ გულს და ა. შ. მტკიცდება, რომ ეს პროცედურა კრებადია გარკვეული თვალსაზრისით და მას ოპტიმალური კრებადობისაკენ მივყავართ.

მიმდევრობის ოპტიმიზაციის მეორე მეთოდი ლიტერატურაში ცნობილია Cross-Validation სახელწოდებით. ეს ფაქტიურად არის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი მიმდევრობის რიცხვითი შერჩევისათვის.

მთავარი იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ h მიმდევრობა ისე შევარჩიოთ, რომ შესაბამისი საშუალო კვადრატული გადახრა (ISE) იყოს უმცირესი. ჩავწეროთ ინტეგრალური კვადრატული გადახრა

$$ISE(h)=\int_R \hat{f}^2(x)dx-2\int_R \hat{f}(x)f(x)dx+\int_R f^2(x)dx.$$

ბოლო შესაკრები არაა დამოკიდებული h-ზე. ამიტომ შეგვიძლია მისი უგულვებელყოფა. ვცადოთ პირველი ორი შესაკრების მინიმიზაცია. პირველი ინტეგრალის გამოიანგარიშება ყოველთვის შეგვიძლია მოცემული h-სათვის, მაშინ, როცა მეორე ინტეგრალში ეს არ შეიძლება, რადგანაც მასში უცნობი $f(x)$ სიმკვრივე მონაწილეობს. შევაფასოთ მეორე ინტეგრალი დაკვირვების ნაწილის საშუალებით ასე

$$\hat{f}_i(x) = \frac{1}{(n-1)h}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} K\left(\frac{X_j - x}{h}\right),$$

სადაც უგულვებელყოფილია i-ური დაკვირვება $f(x)$-ის შეფასებაში. მეორე ინტეგრალი ასეთი ჯამით შევაფასოთ: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_i(X_i)$. მაშინ მინიმიზაციისათვის საჭირო ფუნქცია იქნება

$$CV(h) = \int_R \hat{f}^2(x)dx - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_i(X_i) = \frac{1}{n^2h}\sum_{i,j=1}^{n} K^*\left(\frac{X_i - X_j}{h}\right) + 2\frac{K(0)}{nh},$$

სადაც $K^*(z) = K^{(2)}(z) - 2K(z)$. აქ $K^{(2)}$ არის ნახვევი გულისა თავისივე თავთან

$$K^{(2)}(z) = \int_R K(u-v)K(v)dv.$$

მაგალითად, თუ K არის (0,1) პარამეტრებით განაწილებული ნორმალური სიმკვრივე, მაშინ $K^{(2)}$ არის (0,2) პარამეტრებით განაწილებული ნორმალური სიმკვრივე. ამ შემთხვევებში საძებნი მიმდევრობას ასე ავაგებთ

$$h_{CV} = \arg\min_{h>0} CV(h).$$

ნაჩვენებია, რომ როცა $n \to \infty$, მაშინ h_{CV} იკრიბება ოპტიმალური h^* მიმდევრობისაკენ. ამასთან დადგენილია, რომ კრებადობის სიჩქარე საკმაოდ დაბალია და $n^{-1/10}$-ის ტოლია.

2.3. ტესტირების სქემა

სიმკვრივის არაპარამეტრული შეფასებები შეიძლება გამოყენებულ იქნას განაწილებისათვის ჰიპოთეზების შესამოწმებლად. ამის აღსაწერად დავუბრუნდეთ მარგინალური სიმკვრივის შეფასების ერთგანზომილებიან შემთხვევას. ჩავთვალოთ, რომ მოცემულია სიმკვრივის პარამეტრული კლასი, მაგალითად $f(\,\cdot\,,\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq R^k$. θ პარამეტრის შეფასება შესაძლებელია (1.2) ფორმულის გამოყენებით, გარკვეულ პირობებში. შეფასება საკმაოდ რეგულარულია და $f(\,\cdot\,;\hat{\theta})$ საკმაოდ კარგი ყოფაქცევით გამოირჩევა. ასეთი შეფასებისათვის დაკმაყოფილებული იქნება ჰიპოთეზა:

$$H_0:\ f(\,\cdot\,)=f(\,\cdot\,;\theta_0) \quad \text{რაღაც} \quad \theta_0 \in \Theta\text{-სათვის.}$$

შევნიშნოთ, რომ არაპარამეტრული მეთოდები მხოლოდ აღნიშნული ჰიპოთეზისათვის მოქმედებს და ჩვენი ეს მოქმედება არ არის ზოგადი ხასიათის.

$\hat{f}$ გულოვანი შეფასება არის მოდელისაგან დამოუკიდებელი და ამიტომ არის თავსებადი, როგორც H ჰიპოთეზასთან, ასევე ალტერნატიულ ჰიპოთეზასთან $H_A: f(\,\cdot\,) \neq f(\,\cdot\,;\theta)$ ყოველი $\theta \in \Theta$-სათვის. საინტერესოა ასეთ შემთხვევაში შევადაროთ ორივე მეთოდით მიღებული შედეგები ერთმანეთს. ამის გასაკეთებლად ამოვირჩიოთ ერთმანეთისაგან განსხვავებული $x_1,..x_N$ წერტილები f ფუნქციის მატარებელი სიმრავლიდან. H_0 ჰიპოთეზის პირობებში ჩავთვალოთ, რომ $\sqrt{nh}\left(f(x_i;\hat{\theta})-f(x_i;\theta_0)\right)=o_P(1)$ (ეს შესრულებულია, მაგალითად მაშინ, როცა $f(x_i;\hat{\theta})$ კრებადია $\sqrt{n}$ რიგით),

$$\sqrt{nh}\left(\begin{bmatrix}\hat{f}(x_1)\\ \dots\dots\dots \\ \hat{f}(x_N)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f(x_1;\hat{\theta})\\ \dots\dots\dots\dots \\ f(x_N;\hat{\theta})\end{bmatrix}\right)\xrightarrow{d} N\left(0,\int_R K^2(z)dz\cdot diag\left(f(x_1,...,f(x_N))\right)\right).$$

შესაბამისად

$$T_{1,n}=nh\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\hat{f}(x_i)-f(x_i;\hat{\theta})\right|^2}{\int_R K^2(z)dz\cdot\hat{f}(x_i)}\xrightarrow{d}\chi(N).$$

მაშასადამე ასეთ ტესტს გააჩნია დაბალი სიმძლავრე. მაგალითად შეიძლებოდა ისე აგვერჩია ეს წერტილები, რომ არჩეული წერტილებისათვის $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\overline{\theta}\in\Theta$ და მაშინ ჩვენ მივიღებდით, რომ $f(x_i)=f(x_i;\overline{\theta})$, მაშინ, როცა სინამდვილეში $f(x_i)\neq f(x_i;\overline{\theta})$. ე. ი. $T_{1,n}$-ის გამოყენებით მივიღებთ H_0 ჰიპოთეზას, მაშინ როცა ადგილი აქვს შებრუნებულ (ალტერნატიულ) ჰიპოთეზას. ამ სიტუაციას არ ამარტივებს არჩევის N-ის გაზრდა, რადგან შეცდომის რისკი მაინც დიდია.

ამიტომ უნდა ვცადოთ ისეთი ტესტი ავაგოთ, რომ მასში მონაწილეობდეს ყველა წერტილი მატარებელი სიმრავლიდან. ასეთი ტესტია

$$T_{2,n}=\int_R\left|\hat{f}(x)-f(x;\hat{\theta})\right|^2dx.$$

ცნობილია, რომ H_0 ჰიპოთეზის პირობებში $n\sqrt{h}\left(T_{2,n} - T_2\right) \xrightarrow{d} N(0, V_2)$. აქ

$$T_2 = \int_R K^2(z)dz\,, \quad V_2 = 2 \cdot \int_R f^2(z)dz \cdot \int_R \left[\int_R K(u)K(u+v)du \right]^2 dv\,.$$

ალტერნატიული ჰიპოთეზის პირობებში კი $\sqrt{nh} \cdot T_{2,n} \xrightarrow{P} +\infty$.

2.4. განაწილების სიმკვრივის რეკურენტული გულოვანი შეფასების მეთოდი

დავუშვათ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ უცნობი $f(x)$ განაწილების სიმკვრივის მქონე, დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეებია. როგორც წინა პარაგრაფებში ვნახეთ, როზენბლატმა და პარზენმა შემოიღეს $X_1, X_2, \ldots, X_n$ შერჩევაზე დაფუძნებული, $f_n^{(RP)}(x)$ გულოვანი ემპირიული სიმკვრივის შემდეგი განისაზღვრება:

$$f_n^{(RP)}(x) = \frac{a_n}{n} \sum_{i=1}^{n} K(a_n(x - X_i))\,. \qquad (2.5)$$

ვალვერტონმა და ვაგნერმა შემოიღეს განსაზღვრება $f_n(x)$ ემპირიული სიმკვრივისა, რომელიც მცირედ განსხვავდება $f_n^{(RP)}(x)$-საგან და წარმოდგენილია რეკურენტული ფორმით:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i K(a_i(x - X_i)) = \frac{n-1}{n} f_{n-1}(x) + \frac{a_n}{n} K(a_n(x - X_n))\,. \qquad (2.6)$$

დეველსმა მოგვცა ასევე სხვა განზოგადება:

$$f_n^{(D)}(x) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} a_j^{-1}} \sum_{j=1}^{n} K(a_j(x - X_j)), \tag{2.7}$$

ან კიდევ

$$f_n^{(D)}(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} d_i a_i^{-1}} \sum_{j=1}^{n} d_j K(a_j(x - X_j)), \tag{2.8}$$

სადაც $d_j = H(a_j)$ და H დადებითი მნიშვნელობების მქონე რაღაც ფუნქციაა.

შემდეგ რექტომ და რევერსმა შეისწავლეს განზოგადებები $f_n(x)$ ალბათური სიმკვრივის შეფასებისათვის, რომლებიც მოიცავენ (2.5) და (2.6) შემთხვევებს:

$$f_n^{(R)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ni} K(a_{ni}(x - X_i)), \tag{2.9}$$

სადაც $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$ $(n = 1,2,\ .$ დადებით რიცხვთა მონოტონურად ზრდადი მიმდევრობაა.

ალბათური სიმკვრივის რეკურენტული შეფასებისას ცხადად ჩანს ორი ტიპის უპირატესობას: 1) თუ ცნობილია $f_{n-1}(x)$-ის შეფასების მნიშვნელობა, მაშინ $f_n(x)$-ის გამოსათვლელად გამოიყენება მხოლოდ X_n დაკვირვება, ხოლო შერჩევის $X_1, \ldots, X_{n-1}$ მნიშვნელობები უშუალოდ არ გამოიყენება; 2) (2.6), (2.7), (2.8) და (2.9) შეფასებების დისპერსია არ აღემატება $f_n^{(RP)}(x)$-ის დისპერსიას.

თეორემა 2.5. ((2.9) შეფასებისათვის ასიმპტოტიური გადაუნაცვლედობისა და ძალდებულების შესახებ). *დავუშვათ* $\lim_{|x|\to\infty} |x \cdot K(x)| = 0$, *სადაც* $K(x) \in L_1(R)$ *და* $\int_R K(x)dx = 1$. *მაშინ* $f(x)$ *ფუნქციის უწყვეტობის წერტილებში ადგილი აქვს ტოლობას:*

$$\lim_{n\to\infty} Ef_n(x) = f(x)$$

გარდა ამისა, თუ $K(x) \in L_2(R)$ *და* $\frac{\gamma_n}{n} \to 0$, *როცა* $n \to \infty$, *მაშინ*

$$Df_n(x) \sim \frac{\gamma_n}{n} f(x) \int_R K^2(u)du, \quad \gamma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

და

$$f_n(x) \xrightarrow{P} f(x).$$

ამ თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენებთ კარგად ცნობილ ფაქტს:

ლემა (ტეპლიცი). *ვთქვათ* $\{c_n\}$ *არაუარყოფითი რიცხვთა მიმდევრობაა,* $b_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$, $b_n \uparrow \infty$, *როცა* $n \to \infty$. *დავუშვათ, აგრეთვე,* $\{d_n\}$ *რიცხვითი მიმდევრობა კრებადია რაღაც* d *რიცხვისაკენ. მაშინ*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} c_i d_i \to d. \tag{2.10}$$

კერძოდ, თუ $c_i = 1$ *ყველა* $i = 1,2,\ldots,$ *მაშინ*

$$\frac{1}{n}\left(d_1+d_2+\ldots+d_n\right)\to d\,. \tag{2.11}$$

დამტკიცება (თეორემა 2.4-ის). გვაქვს

$$Ef_n(x)=n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\int_R K(u)\,f\left(x-\frac{u}{a_j}\right)du$$

და

$$Ef_n(x)-f(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}d_j(x)\,,$$

სადაც

$$d_j(x)=\int_R K(u)\left[f\left(x-\frac{u}{a_j}\right)-f(x)\right]du\,.$$

ვთქვათ, x არის $f(x)$-ის უწყვეტობის წერტილი. დავაფიქსიროთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი. მაშინ შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი $\delta>0$, რომ როცა $\left|\frac{u}{a_j}\right|\le\delta$ სრულდება უტოლობა $\left|f\left(x-\frac{u}{a_j}\right)-f(x)\right|\le\varepsilon$. ამიტომ

$$\int_{|u|\le a_j\delta}|K(u)|\cdot\left|f\left(x-\frac{u}{a_j}\right)-f(x)\right|du\le\varepsilon\cdot\int_R|K(u)|du\,.$$

შემდეგ

$$\int_{|u|\ge a_j\delta}|K(u)|\cdot\left|f\left(x-\frac{u}{a_j}\right)-f(x)\right|du\le\int_{|t|>\delta}|a_jt|\cdot|K(ta_j)|\cdot\left|\frac{f(x+t)}{t}\right|dt+$$

$$+f(x)\int_{|y|>a_j\delta}|K(y)|\,dy\,. \tag{2.12}$$

(2.12) გამოსახულების მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები ნაკლებია ვიდრე $\frac{1}{\delta}\sup_{|z|\ge\delta a_j}|zK(z)|$, რომელიც კლებადობით მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $j\to\infty$. მეორე წევრი ასევე კრებადია ნულისაკენ.

ასე, რომ $d_j\to 0$, როცა $j\to\infty$. მაშასადამე, (2.11)-ის ძალით, როცა $n\to\infty$ გვექნება $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}d_j\to 0$. ანუ $Ef_n(x)\to f(x)$, როცა $n\to\infty$.

უკვე დამტკიცებულის თანახმად, გვექნება

$$Df_n(x) = n^{-2}\sum_{k=1}^{n} a_k \left[a_k \int_R K^2(a_k(x-u)) f(u)du \right] + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

აქედან და (2.10)-დან მივიღებთ, რომ

$$Df_n(x) \sim \frac{\gamma_n}{n} f(x) \int_R K^2(u)du .$$

ასე, რომ $f_n(x) \xrightarrow{P} f(x)$, როცა $n \to \infty$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.5. *დავუშვათ $K(x)$ გული შემოსაზღვრულია, $K(x) = K(-x)$, $x^2K(x) \in L_1(R)$ და $\int_R K(x)dx = 1$. სიმკვრივე $f(x)$ და მისი წარმოებულები მეორე რიგამდე შემოსაზღვრულია, ამასთან $f^{(2)}(x) \in L_1(R)$. მაშინ*

$$E\int_R [f_n(x) - f(x)]^2 r(x)dx = \frac{\gamma_n}{n} \int_R f(x)r(x)dx \int_R K^2(x)dx +$$

$$+\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{-2}\right)^2 \frac{1}{4}\int_R \left[f^{(2)}(x)\right]^2 r(x)dx \left(\int_R u^2K(u)du\right)^2 + o\left(\frac{\gamma_n}{n} + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{-2}\right)^2\right), \tag{2.13}$$

სადაც $r(x)$ შემოსაზღვრული და უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა.

დამტკიცება. გვაქვს

$$E\int_R [f_n(x) - f(x)]^2 r(x)dx = \int_R Df_n(x)r(x)dx + \int_R [Ef_n(x) - f(x)]^2 r(x)dx ,$$

ამასთან

$$\int_R D(f_n(x))r(x)dx = n^{-2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \int_R EK^2(a_k(x - X_1))r(x)dx -$$

$$-n^{-2}\sum_{k=1}^{n} \int_R (a_k EK(a_n(x - X_1)))^2 r(x)dx .$$

თეორემაში მოთხოვნილი პირობების ძალით $f(x)$-ის და $K(x)$-ის მიმართ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \int_R [(a_k EK(a_k(x - X_1)))]^2 r(x)dx = o\left(\frac{\gamma_n}{n}\right)$$

და

$$n^{-2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \int_R EK^2(a_k(x - X_1))r(x)dx = n^{-2}\sum_{k=1}^{n} a_k \int_R f(x)r(x)dx \int_R K^2(u)du +$$

$$+O\left(n^{-2}\sum_{k=1}^{n}a_k^{-1}\right). \tag{2.14}$$

გვექნება

$$\int_R Df_n(x)r(x)dx=\frac{\gamma_n}{n}\int_R f(x)r(x)dx\int_R K^2(u)du+o\left(\frac{\gamma_n}{n}\right). \tag{2.15}$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\int_R\left[Ef_n(x)-f(x)\right]^2 r(x)dx=\int_R\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{-2}\int_R\int_0^1(1-t)u^2K(u)f^{(2)}\left(x-t\frac{u}{a_k}\right)dtdu\right]^2 r(x)dx=$$

$$=\left(n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_k^{-2}\right)^2\cdot A_n, \tag{2.16}$$

სადაც

$$A_n=\int_R\left[\frac{1}{d_n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{-2}\int_R\int_0^1(1-t)u^2K(u)f^{(2)}\left(x-t\frac{u}{a_k}\right)dtdu\right]^2 r(x)dx,\quad d_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^{-2}.$$

საჩვენებელი დაგვრჩა მხოლოდ ის, რომ, როცა $n\to\infty$

$$A_n\to\int_R\left[f^{(2)}(x)\right]^2 r(x)dx\cdot\left(\frac{1}{2}\int_R u^2K(u)du\right)^2. \tag{2.17}$$

მინკოვსკის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$A_n^{1/2}\le\int_R\int_0^1(1-t)u^2K(u)\cdot\left[\int_R\left(\frac{1}{d_n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{-2}\cdot f^{(2)}\left(x+t\frac{u}{a_k}\right)\sqrt{r(x)}\right)^2dx\right]^{1/2}dudt\le$$

$$\le\int_R\int_0^1(1-t)u^2K(u)\cdot\left\{\frac{1}{d_n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{-2}\int_R\left[f^{(2)}\left(x+t\frac{u}{a_k}\right)\right]^2 r(x)dx\right\}^{1/2}dudt. \tag{2.18}$$

ასე, რომ

$$\left(f^{(2)}(x)\right)^2\cdot\left|r\left(x-\frac{u}{a_k}t\right)\right|\le C\cdot\left[f^{(2)}(x)\right]^2\in L_1(R)$$

და

$$\left(f^{(2)}(x)\right)^2 \cdot r\left(x - t\frac{u}{a_k}\right) \to \left(f^{(2)}(x)\right)^2 r(x), \text{ როცა } \quad k \to \infty .$$

მაშინ ლებეგის თეორემის თანახმად მაჟორირებული მიმდევრობის კრებადობის შესახებ და (2.10)-ის მიხედვით, (2.18)-დან მივიღებთ

$$\limsup_n A_n \le \int_R \left(f^{(2)}(x)\right)^2 r(x)dx \left(\frac{1}{2}\int_R u^2 K(u)du\right)^2 . \tag{2.19}$$

მეორეს მხრივ, უკვე ხსენებული ლებეგის თეორემიდან გამომდინარეობს ასევე, რომ

$$\int_R \int_0^1 (1-t)u^2 K(u) f^{(2)}\left(x - t\frac{u}{a_k}\right) dtdu \to f^{(2)}(x)\frac{1}{2}\int_R u^2 K(u)du , \text{ როცა } \quad n \to \infty ,$$

და შედეგად, (2.10)-ის გამოყენება და ფატუს ლემა მოგვცემს:

$$\liminf_n \ A_n \ge \int_R \left[f^{(2)}(x)\right]^2 r(x)dx \left(\frac{1}{2}\int_R u^2 K(u)du\right)^2 . \tag{2.20}$$

(2.19) და (2.20) უტოლობების გაერთიანებით მივიღებთ (2.17)-ს. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. *თუ* $r(x) \equiv const$, *მაშინ მოთხოვნა* $f^{(2)}(x) \in L_1(R)$ *შეგვიძლია შევცვალოთ* $f^{(2)}(x) \in L_2(R)$ *პირობით. თუ ასევე* $r(x)$ *უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა,* $|r(x)| \le c < \infty$ *და* $r(x) \in L_1(R)$, *მაშინ შეგვიძლია მოვითხოვოთ, რომ* $f^{(2)}(x) \in L_2(R)$.

დავუშვათ ახლა $a_j = A \cdot j^{\alpha}$. როგორც ცნობილია, $\sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + o(n^{\alpha+1})$, $\alpha > -1$. ამიტომ

$$\frac{\gamma_n}{n} = \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{a_n}{n} + o\left(\frac{a_n}{n}\right)$$

და

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j^{-2}\right) = \frac{1}{(1-2\alpha)^2} \cdot a_n^{-4} + o(a_n^{-4}), \quad \alpha \ne \frac{1}{2} .$$

მაშასადამე

$$E\int_R \left[f_n(x) - f(x)\right]^2 r(x)dx \sim \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{a_n}{n} \cdot \int_R f(x)r(x)dx \cdot \int_R K^2(u)du +$$

$$+ \frac{1}{(1-2\alpha)^2} a_n^{-4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_R \left[f^{(2)}(x)\right]^2 r(x)dx \cdot \left(\int_R u^2 K(u)du\right)^2 .$$

5. მალიავინის ფუნქციონალის შეფასება ერთ და მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში.

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ ლოგარითმული წარმოებულის, სხვანაირად, მალიავინის ფუნქციონალის არაპარამეტრულ შეფასებას. მალიავინის აღრიცხვა XX საუკუნის ბოლო მეოთხედში დამუშავდა და ალბათობის თეორიისა და საერთოდ სტოქასტური ანალიზის მძლავრ იარაღად მოგვევლინა. ეს თეორია ახლაც ინტენსიური შესწავლის საგანია. მიუხედავად მრავალი შრომისა, რომელიც ამ კვლევებს ეძღვნება, საკითხის სტატისტიკური მხარე ჯერ-ჯერობით საერთოდ ღიად რჩება. ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ ამ მიმართულებით პირველ შედეგს, რომელიც ხსნის პრინციპულ შესაძლებლობებს კვლევებისათვის ამ მიმართულებით. განსაკუთრებით ჩვენთვის საინტერესოა სტატისტიკურ შეფასებათა არაპარამეტრული მეთოდები.

ვთქვათ $\{\Omega, \Im, P\}$ ფიქსირებული ალბათური სივრცეა. განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე ξ.

ვიტყვით, რომ ეს სიდიდე აკმაყოფილებს ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას, თუ არსებობს ისეთი ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდე $L(\xi)$, რომ ნებისმიერი, უსასრულოდ დიფერენცირებადი, ფინიტური დეტერმინისტული ფუნქციისათვის $\varphi \in C_c^\infty(R)$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$E\varphi'(\xi)\eta = E\varphi(\xi)L(\xi) \tag{2.21}$$

ასეთი ტიპის განსაზღვრა ფარულად შეიცავს ინფორმაციას შემთხვევითი სიდიდის სიგლუვის შესახებ, რომელზედაც საუბარი შეუძლებელია იმის გამო, რომ ალბათური სივრცის ცნება არ გულისხმობს ტოპოლოგიის არსებობას ამ სივრცეზე. მეორეს მხრივ შემთხვევითი სიდიდის ცნება ექვივალენტურია ზომის (განაწილების) მოცემისა R-ზე. ეს კი საშუალებას იძლევა მისი ანალიზური თვისებების შესწავლისა. სწორედ ეს მომენტია დაფიქსირებული (2.21) ფორმულაში. ასეთი ტიპის განსაზღვრებები კარგადაა ცნობილი სობოლევის აზრით განზოგადოებული ფუნქციების თეორიიდან. ეს მიმართულება მოსკოვის მათემატიკურ სკოლაში ზომათა კლასებისათვის ს. ფომინის ხელმძღვანელობით 60-იანი წლებიდან დაიწყო და დღემდე წარმატებით მიმდინარეობს. მაგრამ გამოსავალ ცნებად (2.21) ტოლობის მსგავსი ტოლობა ფრანგმა პ. მალიავინმა 70-იანი წლების ბოლოს შემოიღო.

შემოღებული განსაზღვრა ძალზე ეფექტური გამოდგა სტოქასტური ანალიზისა და მათემატიკური ფიზიკის მრავალი მიმართულებისათვის, განსაკუთრებით კი ისეთი დარგებისათვის, რომლებიც მნიშვნელოვნად გამოიყენებენ უსასრულოგანზომილებიან მეთოდებს.

დავადგინოთ (2.21) ფორმულიდან გამომდინარე რამოდენიმე შედეგი და მოვიყვანოთ მაგალითები.

1) ვთქვათ ξ განაწილებულია მაჩვენებლიანი განაწილებით. ე.ი. მისი სიმკვრივეა:

$$p_\xi(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{როცა} \quad t \ge 0 \\ 0, & \text{როცა} \quad t < 0 \end{cases}, \qquad \lambda > 0 .$$

მაშინ

$$E\varphi'(\xi) = \int_R \varphi'(t) p_\xi(t)dt = -\int_R \varphi(t) p'_\xi(t)dt = \lambda^2 \int_0^\infty \varphi(t) e^{-\lambda t} dt = E\varphi(\xi)\chi_{p_\xi > 0}(\xi)\lambda .$$

ანუ მივიღებთ $L(\xi)=\lambda\chi_{p_\xi>0}(\xi)=\lambda\chi_{[0,\infty)}(\xi)$ რადგან $\{p_\xi>0\}=\{\omega:\xi(\omega)\geq 0\}$. აქ და ქვემოთ $\chi_A(x)$ არის $A\in\mathrm{B}(R)$ სიმრავლის ინდიკატორი, სადაც $\mathrm{B}(R)$ ბორელის σ-ალგებრაა R-ზე.

2) ვთქვათ ξ განაწილებულია ნორმალური განაწილებით პარამეტრებით (a,σ^2). მისი სიმკვრივეა:

$$p_\xi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

გვექნება

$$E\varphi'(\xi)=\int_R\varphi'(t)p_\xi(t)dt=-\int_R\varphi(t)p'_\xi(t)dt=\int_R\varphi(t)\frac{t-a}{\sigma^2}p_\xi(t)dt=E\varphi(\xi)\frac{\xi-a}{\sigma^2}.$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში $L(\xi)=\dfrac{\xi-a}{\sigma^2}$.

3) თუ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია წარმოებადი სიმკვრივე, მაშინ ის აკმაყოფილებს ნაწილობითი ინტეგრების პირობას და

$$L(\xi)=-\frac{p'_\xi(\xi)}{p_\xi(\xi)}\chi_{p_\xi>0}(\xi). \tag{2.22}$$

მართლაც

$$E\varphi'(\xi)=\int_R\varphi(t)p'_\xi(t)dt=-\int_R\varphi(t)\frac{p'_\xi(t)}{p_\xi(t)}\chi_{p_\xi>0}(t)p_\xi(t)dt.$$

ამ თვისებიდან გამომდინარე ჩვენ $L(\xi)$ ფუნქციას ξ შემთხვევითი სიდიდის ლოგარითმულ წარმოებულს ვუწოდებთ (თუმცა ეს ტერმინი მის განაწილებას უფრო შეეხება).

4) აღვნიშნოთ $\mu_\xi(A)=P\{\xi\in A\}$, $A\in\mathrm{B}(A)$. ცნობილია, რომ განაწილების ზომა μ_ξ ცალსახად განისაზღვრება განაწილების ფუნქციის (შესაბამისად განაწილების სიმკვრივის) საშუალებით. 3) თვისება მიუთითებს, რომ თუ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ზომა ექვივალენტურია ლებეგის ზომის მიმართ $\mu_\xi\sim l$ და შესაბამისი სიმკვრივე $\rho(t)=\dfrac{d\mu_\xi}{dl}(t)$ წარმოებადია, მაშინ ξ აკმაყოფილებს ნაწილობითი ინტეგრების თვისებას და $L(\xi)=-\dfrac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)}$ (ეს გამოსახულება გვიჩვენებს, რომ $L(\xi)$ ფუნქცია ნამდვილად წარმოადგენს ზომის ლოგარითმულ წარმოებულს), მართლაც

$$E\varphi'(\xi)=\int_R\varphi'(t)d\mu_\xi(t)=\int_R\varphi'(t)\rho(t)dt=-\int_R\varphi(t)\rho'(t)dt=-\int_R\varphi(t)\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}d\mu_\xi(t).$$

5) ვთქვათ f რაიმე გლუვი ფუნქციაა, ხოლო ξ შემთხვევითი სიდიდე აკმაყოფილებს (2.21) პირობას. მაშინ ვნახოთ დააკმაყოფილებს თუ არა ასეთივე პირობას $\eta=f(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდეც.

$$E\varphi'(\eta)=E\varphi'(f(\xi))=\int_R\varphi'(f(t))p_\xi(t)dt=\int_R\varphi'(s)p_\xi(f^{-1}(s))\left[f^{-1}(s)\right]'ds=$$

$$= -\int_R \varphi(s)\left[\frac{p_\xi(f^{-1}(s))}{f'(f^{-1}(s))}\right]' ds = -E\varphi(\eta)\left[\frac{p_\xi(x)}{f'(x)}\right]' \frac{\chi_{p_\xi>0}(x)}{p_\xi(x)}\Bigg|_{x=f^{-1}(\eta)} .$$

ე. ი.

$$L(\eta) = -\left[\frac{p_\xi(x)}{f'(x)}\right]'\Bigg|_{x=f^{-1}(\eta)} \frac{1}{p_\xi(f^{-1}(\eta)}\chi_{p_\xi>0}(f^{-1}(\eta)), \tag{2.23}$$

სადაც $p_\xi(t)$ არის ξ შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივე ლებეგის ზომით. ამ ფორმულიდან ვხედავთ, რომ f ფუნქცია უნდა იყოს ორჯერ დიფერენცირებადი და მისი პირველი რიგის წარმოებული უნდა იყოს ნიშან-მუდმივი. ეს უკანასკნელი მიუთითებს იმაზე, რომ საქმე გვაქვს მკაცრად მონოტონურ ფუნქციასთან.

6) წინა თვისებიდან დავასკვნით, რომ თუ ξ აკმაყოფილებს (2.21) თვისებას, მაშინ მას აკმაყოფილებს აგრეთვე $c\xi$, $(c \neq 0)$ შემთხვევითი სიდიდეც. გვაქვს

$$L(c\xi) = -\frac{p'_\xi(\xi)}{cp_\xi(\xi)}\chi_{p>0}(\xi) = \frac{1}{c}L(\xi). \tag{2.24}$$

7) თუ ξ აკმაყოფილებს (2.21) თვისებას, მაშინ მას აკმაყოფილებს აგრეთვე $\xi + c$ სიდიდეც და $L(\xi + c) = L(\xi)$.

8) მნიშვნელოვანია ის, რომ თუ შემთხვევითი სიდიდე ξ აკმაყოფილებს (2.21) თვისებას, მაშინ მისი განაწილების ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია ლებეგის ზომის მიმართ და გვექნება

$$p_\xi(t) = E\chi_{[t,\infty)}(\xi)L(\xi). \tag{2.25}$$

მართლაც, ავიღოთ ისეთი $K(t)$ ფუნქცია $C_c^\infty(R)$ სივრციდან, რომლის მატარებელი სიმრავლე მოთავსებულია [-1,1] –ში და $\int_R K(t)dt = 1$. განვსაზღვროთ $K_n(t) = nK(nt)$. ცხადია $K_n(t)$ განაწილების სიმკვრივეა. ყოველი n-სათვის შევარჩიოთ ისეთი შემთხვევითი სიდიდეები ς_n, რომლებიც დამოუკიდებელნი არიან ξ-საგან და მათი განაწილების სიმკვრივეა $K_n(t)$. ამ შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების ფუნქციებია $\Phi_n(x) = \int_{-\infty}^x K_n(t)dt$. მაშინ ნებისმიერი $\psi \in C_c^\infty$ ფუნქციისათვის

$$E\psi(\xi) = \lim_{n\to\infty} E\psi(\xi - \varsigma_n) = \lim_{n\to\infty}\int_R\int_R \psi(u-v)K_n(v)dvd\mu_\xi(u) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_R\int_R \psi(z)K_n(u-z)dzd\mu_\xi(u) = \lim_{n\to\infty}\int_R \psi(z)EK_n(\xi - z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_R \psi(z)E\Phi'_n(\xi - z)dz =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_R \psi(z)E\Phi_n(\xi - z)L(\xi)dz .$$

ამ ტოლობის თანახმად, ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ზომა აბსოლუტურად უწყვეტია ლებეგის ზომის მიმართ. გარდა ამისა, $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(\xi-z)=\chi_{[0,\infty)}(\xi-z)=\chi_{[z,\infty)}(\xi)$ ალბათობით 1. ამასთან შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლებეგის თეორემა მაჟორანტული ფუნქციის შესახებ და გადავიდეთ ზღვარზე ინტეგრალის შიგნით:

$$E\psi(\xi)=\int_R \psi(t)EL(\xi)\chi_{[t,\infty)}(\xi)dt\ . \quad \#$$

9) წინა თვისებიდან რამოდენიმე დასკვნის გაკეთება შეგვიძლია.

ა) თუ ξ შემთხვევითი სიდიდე აკმაყოფილებს (2.21) პირობას, მაშინ მას გააჩნია დიფერენცირებადი განაწილების სიმკვრივე. ეს (2.25) ფორმულიდან ჩანს.

ბ) ვთქვათ $L(\xi)$-ს მეორე რიგის მომენტი გააჩნია. მაშინ (2.25) ფორმულიდან მივიღებთ

$$p_\xi(t)\le\sqrt{P(\xi\ge t)}\|L(\xi)\|. \tag{2.26}$$

აქედან გამოდის $\lim_{t\to\infty}p_\xi(t)=0$. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ თუ $L(\xi)$-ს გააჩნია p რიგის მომენტი ($p>1$), მაშინ $p_\xi(t)\le C\sqrt{t^{-p}}$.

გ) სამართლიანია აგრეთვე ფორმულა

$$p_\xi(t)=E\chi_{(-\infty,t]}(\xi)L(\xi)\ . \tag{2.27}$$

ეს ფორმულაც ზუსტად ისევე დამტკიცდება, როგორც (2.25).

დავუბრუნდეთ ახლა ძირითად განსაზღვრას (2.21). მაგრამ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა საქმე გვაქვს იტერაციასთან.

ასეთი განსაზღვრა შემოვიღოთ

ვიტყვით, რომ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები აკმაყოფილებენ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას, თუ არსებობს ისეთი ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდე $L(\xi;\eta)$, რომ ნებისმიერი ფინიტური და უსასრულოდ დიფერენცირებადი $\varphi(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$E\varphi'(\xi)\eta=E\varphi(\xi)L(\xi;\eta)\ . \tag{2.28}$$

ცხადია $L(\xi)=L(\xi;1)$. ახლა ჩავატაროთ იტერაცია.

აღვნიშნოთ

$$L_0(\xi)=1\,,\quad L_{k+1}(\xi)=L(\xi;L_k(\xi))\ .$$

თუ არსებობენ $L_m(\xi)$, როცა $m=0,1,\ldots,k$, მაშინ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს გააჩნია k რიგის წარმოებული და თითოეული წარმოებული ასე გამოითვლება

$$p_\xi^{(m)}(t)=(-1)^m E\chi_{[t,\infty)}(\xi)L_{m+1}(\xi)\ . \tag{2.29}$$

დავამტკიცოთ (2.29) ფორმულა. ვთქვათ ჯერ $m=1$. მაშინ ავიღოთ ისეთი ფუნქციები $\Theta_n(t)$, რომ გვექნეს $\Theta_n''(t)=K_n(t)$. მაგალითად $\Theta_n(t)=\int_{-\infty}^t\Phi_n(s)ds$, სადაც $\Phi_n(t)$ აღებულია 8) თვისების დამტკიცებიდან. ორჯერ გამოვიყენოთ ნაწილობრივი ინტეგრება

$$EK_n(\xi-z)=E\Phi_n(\xi-z)L(\xi;1)=E\Theta_n(\xi-z)L(\xi;L(\xi;1))\ .$$

გავითვალისწინოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\Theta_n(\xi - z) = (\xi - z)\chi_{[z,\infty\}}(\xi)$ და ჩავწეროთ

$$E\varphi(\xi) = \int_R \varphi(z)E\big((\xi - z)\chi_{[z,\infty)}(\xi)L(\xi; L(\xi;1))\big)dz\ .$$

აქედან ვხედავთ, რომ

$$p_\xi(t) = E\big((\xi - t)\chi_{[t,\infty)}(\xi)L(\xi; L(\xi;1))\big).$$

ამ წარმოდგენიდან ჩანს, რომ სიმკვრივე დიფერენცირებადია და სამართლიანია (2.29) ფორმულა $m=1$ შემთხვევაში. ანალოგიურადაა საქმე ზოგად შემთხვევაშიც. ავიღებთ ისეთ $\Xi_n(t)$ ფუნქციას, რომ გვექნეს $\Xi_n^{(m)}(t) = \chi_{[0,\infty)}(t)$ და რამოდენიმეჯერ გამეორებული ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით ჩავწერთ

$$p(t) = E\big(\Xi_n(\xi - t)L_{m+1}(\xi)\big).\ \#$$

(2.29) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ თუ ξ შემთხვევითი სიდიდე აკმაყოფილებს $L_m(\xi)$ გამოსახულების განმარტებას, მაშინ ყოველი k-სათვის, როცა $k \le m$ გვექნება სიმკვრივის შემოსაზღვრულობა, წარმოებულების გაქრობა უსასრულობაში და ასეთი უტოლობის სამართლიანობა $\left|p_\xi^{(k)}(t)\right| \le \sqrt{P(\xi > t)}\|L_k(\xi)\| \le C\sqrt{t^k}$. თუკი ასეთი პირობა სრულდება ყოველი ნატურალური რიცხვისათვის, მაშინ სიმკვრივეების სიმრავლე ჩართული იქნება განზოგადოებული ფუნქციების თეორიაში ძირითად ფუნქციათა სივრცეში.

(2.25) ფორმულის ანალოგიურად დამტკიცდება ასეთი ტოლობა

$$L_k(\xi) = (-1)^k\,\frac{p_\xi^{(k)}(t)}{p_\xi(t)}\,\chi_{p_\xi>0}(\xi)\ . \tag{2.30}$$

ახლა კი განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა (2.28) ფორმულის შესაბამისად. თუ ξ და μ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ საქმე დადის წინა შემთხვევაზე. ეს გამომდინარეობს ასეთი ტოლობიდან

$$E\varphi'(\xi)\eta = E\eta\cdot E\varphi'(\xi) = E\big(\varphi(\xi)L(\xi;1)E\eta\big).$$

ამიტომ საინტერესოა მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა ეს სიდიდეები ერთმანეთზე დამოკიდებულია. ვთქვათ ეს დამოკიდებულება ფუნქციონალურია: $\eta = f(\xi)$. მაშინ

$$E\varphi'(\xi)\,f(\xi) = \int_R \varphi'(t)\,f(t)\,p_\xi(t)dt = -\int_R \varphi(t)\big[f'(t)\,p_\xi(t) + f(t)\,p'_\xi(t)\big]dt =$$

$$= -\int_R \varphi(t)\left[f'(t) + f(t)\frac{p'_\xi(t)}{p_\xi(t)}\right]p_\xi(t)dt = E\varphi(\xi)L(\xi; f(\xi))\,,$$

სადაც $L(\xi; f(\xi)) = -\left[f'(t) + f(t) \dfrac{p'_\xi(t)}{p_\xi(t)} \right].$

საზოგადოდ შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$E\varphi'(\xi)\eta = \int_R \int_R \varphi'(t) s p_{\xi\eta}(t,s) ds dt = -\int_R \int_R \varphi(t) s \frac{\partial p_{\xi\eta}(t,s)}{\partial t} dt ds = E\varphi(\xi)\eta \frac{\partial p_{\xi\eta}(\xi,\eta)}{\partial \xi} \frac{\chi_{p_{\xi\eta}>0}(\xi,\eta)}{p_{\xi\eta}(\xi,\eta)} .$$

ე. ი. $L(\xi,\eta) = \eta \dfrac{\partial p_{\xi\eta}(\xi,\eta)}{\partial \xi} \dfrac{\chi_{p_{\xi\eta}>0}(\xi,\eta)}{p_{\xi\eta}(\xi,\eta)}.$

ამ ფორმულიდან ვხედავთ, რომ $L(\xi;\eta)$ წრფივი და ერთგვაროვანია მეორე არგუმენტის მიმართ. ასევე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ის დიფერენციალური ოპერატორია.

მთავარი თვისება ამ ნაწილში არის შემდეგი: თუ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები აკმაყოფილებენ (2.28) პირობას, მაშინ

$$E(\eta \mid \xi = x) = \frac{E\chi_{[x,\infty)}(\xi)L(\xi;\eta)}{E\varphi_{[x,\infty)}(\xi)L(\xi;1)} , \tag{2.31}$$

როცა მნიშვნელი ნულისაგანაა განსხვავებული და 0-ია, წინააღმდეგ შემთხვევაში. მართლაც, აღვნიშნოთ (2.31) ტოლობის მარჯვენა მხარე $\Lambda(x)$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $Ef(\xi)\eta = Ef(\xi)\Lambda(\xi)$ ნებისმიერი $f \in C_c^\infty(R)$ ფუნქციისათვის. ჩავწეროთ

$$Ef(\xi)\eta = E\eta \lim_{n\to\infty} \int_R f(t) K_n(\xi - t) dt = \lim_{n\to\infty} \int_R f(t) E\eta K_n(\xi - t) dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_R f(t) E\Phi_n(\xi - t) L(\xi;\eta) dt = \int_R f(t) E\chi_{[0,\infty)}(\xi - t) L(\xi;\eta) dt =$$

$$= \int_R f(t)\Lambda(t) p_\xi(t) dt = Ef(\xi)\Lambda(\xi) . \#$$

წინა შემთხვევის ანალოგიურად აქაც შეიძლება შემოღებულ იქნეს იტერაციული ლოგარითმული წარმოებულები და მაღალი რიგის ლოგარითმული წარმოებული.

ვთქვათ k ნატურალური რიცხვია. ვიტყვით, რომ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები აკმაყოფილებენ IP(k) პირობას, თუ არსებობს ისეთი $L_k(\xi;\eta)$ ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდე, რომ ნებისმიერი $\varphi \in C_c^\infty(R)$ ფუნქციისათვის

$$E\varphi^{(k)}(\xi)\eta = E\varphi(\xi) L_k(\xi;\eta). \tag{2.32}$$

ცხადია $L(\xi;\eta) = L_1(\xi;\eta)$. აღვნიშნოთ $L_2(\xi;\eta) = L(\xi; L_1(\xi;\eta))$ და ა. შ. აქაც შეიძლება წინა შემთხვევის ანალოგიური თეორიის აგება.

ვაჩვენოთ, რომ ერთგანზომილებიანი თვისებები სამართლიანია ზოგად შემთხვევაშიც. ვთქვათ $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. ვიტყვით, რომ ვექტორული შემთხვევითი სიდიდე ξ და ერთგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე η აკმაყოფილებენ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას (სხვანაირად აკმაყოფილებენ IP_α პირობას),

თუ არსებობს ინტეგრებადი შემთხვევითი სიდიდე $L_\alpha(\xi;\eta)$, რომ ნებისმიერი $\varphi \in C_c^\infty(R^n)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$E\left(D^\alpha \varphi(\xi)\eta\right) = E\left(\varphi(\xi) L_\alpha(\xi;\eta)\right). \tag{2.33}$$

სადაც აღნიშნულია $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

ყველა თვისება, რომელიც სამართლიანი არის ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, სამართლიანია ამ სიტუაციაშიც. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ ξ_1, ξ_2, . . . , ξ_n დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, განაწილებული ნორმალური განაწილების კანონით და პარამეტრებით $\xi_k \sim \left(0,\sigma_k^2\right)$.

ვთქვათ $f(t_1,\ldots,t_n)$ და $g(t_1,\ldots,t_n)$ დიფერენცირებადი ფუნქციებია. მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$E\left(\frac{\partial f(\xi)}{\partial t_k} g(\xi)\right) = E\left(f(\xi)\left(g(\xi)\frac{\xi_k}{\sigma_k^2} - \frac{\partial g(\xi)}{\partial t_k}\right)\right),$$

სადაც $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.

მთავარი ამ თეორიაში კონცენტრირებულია განაწილების სიმკვრივის გარშემო. აქაც სამართლიანია ასეთი თვისება:
ვთქვათ $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ ვექტორი აკმაყოფილებს IP_α, $\alpha = (1,\ldots,1)$ პირობას. მაშინ ამ ვექტორის განაწილება აბსოლუტურად უწყვეტია ლებეგის ზომის მიმართ და

$$p_\xi(t) = E\left(\chi_{[t,\infty)}(\xi) L_\alpha(\xi;1)\right),$$

სადაც $\chi_{[t,\infty)} = \prod_{k=1}^{n} [t_k,\infty)$.
ამ თვისების დამტკიცება ზუსტად ისევე ჩატარდება, როგორც ერთგანზომილებიან შემთხვევაში. საჭიროა მხოლოდ ავიღოთ $\delta_0(t) = D^{1+1+\ldots+1}\chi_{[0,\infty)}(t)$ ფუნქციისაკენ კრებადი ძირითადი ფუნქციების მიმდევრობა.

უფრო მეტიც, თუ $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ზოგადი მულტი-ინდექსია და ξ შემთხვევითი ვექტორი აკმაყოფილებს IP_α თვისებას, მაშინ არსებობს $D^\alpha p(t)$ და

$$D^\alpha p(t) = (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} E\left(\chi_{[t,\infty)}(\xi) L_{\alpha+1}(\xi;1)\right),$$

სადაც $\alpha + 1 = \left(\alpha_1 + 1,\ldots,\alpha_n + 1\right)$.
ცხადია ამ თვისების დამტკიცება არ განსხვავდება შესაბამისი ერთგანზომილებიანი თვისების დამტკიცებისაგან.

ამ უკანასკნელი თვისებიდან გამოვა, რომ

$$\left|D^\alpha p(t)\right| \le \sqrt{P\{\xi_1 > t_1,\ldots,\xi_n > t_n\}}\left\|L_{\alpha+1}(\xi;1)\right\|,$$

ხოლო ამ უკანასკნელიდან შეფასება $\left|D^\alpha p(t)\right| \le C|t|^{-p}$ და ა.შ.

რეგრესიის განტოლებისათვისაც სამართლიანია ზუსტი ანალოგია: თუ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები აკმაყოფილებენ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას $\alpha = (1,\ldots,1)$ ვექტორისათვის, მაშინ

$$E(\mu \mid \xi = t) = \frac{E\left(\chi_{[t,\infty)}(\xi)L(\xi;\eta)\right)}{E\left(\chi_{[t,\infty)}(\xi)L(\xi;1)\right)}.$$

ერთგანზომილებიანი დამტკიცება ამ შემთხვევაშიც უცვლელად გადადის.

ბოლოს მოვიყვანოთ განვითარებული აღრიცხვის პრინციპული გამოყენების ერთი მიმართულება.

განვიხილოთ შემთხვევითი პროცესი ξ_t^x, $t \in [0,\infty)$, $\xi_0^x = x$, $x \in R$. ავიღოთ რაიმე ფუნქცია $F: R \to R$. ხშირადაა საჭირო $EF(\xi_t^x)$ სიდიდის წარმოებულების გამოთვლა. როგორც წესი ჩათვლიან, რომ მოცემული F ფუნქცია გლუვია და ჩაწერენ $\dfrac{\partial E\left(F(\xi_t^x)\right)}{\partial x} = E\left(F_x'(\xi_t^x)\dfrac{\partial \xi_t^x}{\partial x}\right)$. მაგრამ ეს მეთოდი არ მოქმედებს თუ კი მოცემული ფუნქცია არაა დიფერენცირებადი. ამ შემთხვევებში შეიძლება ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენება. კერძოდ დავუშვათ ყოველი t-სათვის ξ_t^x შემთხვევითი სიდიდის განაწილება აბსოლუტურად უწყვეტია და სიმკვრივე $p_x(s)$ წარმოებადია. მაშინ

$$\frac{\partial E\left(F(\xi_t^x)\right)}{\partial x} = \int_R F(y)\frac{\partial}{\partial x}p_x^t(y)dy = \int_R F(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln p_x^t(y)\right)p_x^t(y)dy = E\left(F(\xi_t^x)\frac{\partial}{\partial x}\ln p_x^t(\xi_t^x)\right). \quad (2.34)$$

უფრო მეტიც, ეს ფორმულა შეიძლება გამოყენებულ იქნეს იმ შემთხვევაშიც, როცა არაა ცნობილი თვით სიმკვრივის სახე. აქ გამოვიყენებთ პირდაპირ

$$\frac{\partial}{\partial x}E\left(F(\xi_t^x)\right) = E\left(F'(\xi_t^x)\frac{\partial}{\partial x}\xi_t^x\right) = E\left(F(\xi_t^x)L(\xi_t^x;\frac{\partial}{\partial x}\xi_t^x)\right). \quad (2.35)$$

საინტერესოა, რომ (2.35) ტოლობის მხოლოდ პირველ და ბოლო ტოლობებს თუ დავტოვებთ, შესაძლებელი იქნება გვერდი ავუაროთ F ფუნქციაზე წარმოებადობის მოთხოვნას. ამისათვის კი ამ აღრიცხვაში საჭირო ხდება წარმოებულის ცნების გაფართოება, რაც კეთდება კიდეც.

მეორე გზა იმისათვის, რომ (2.34) ფორმულა იქნეს გამოყენებული, მდგომარეობს არაპარამეტრული სტატისტიკის მეთოდების გამოყენება. თუკი ავიღებთ სიმკვრივის ძალდებულ შეფასებას $\hat{p}_x^t(y,n) = \dfrac{a_n^{t,x}}{n}\sum_{k=1}^{n} K(a_n^{t,x}(y - \tilde{\xi}_t^x(n)))$, გამოვიყენებთ (2.34) პროცედურას და ვაჩვენებთ ზღვრულ სიგლუვეს, მივიღებთ საჭირო გამოთვლებს. აქ $\tilde{\xi}_t^x(1)$, . . . , $\tilde{\xi}_t^x(n)$ შერჩევაა ფიქსირებული (t,x) წყვილისათვის.

წინა პარაგრაფებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ლოგარითმული წარმოებულის შეფასება. მართლაც, როგორც ერთ-ერთი თვისებიდან გამომდინარეობს, $L(\xi) = \dfrac{p_\xi'(\xi)}{p_\xi(\xi)}$, როცა $p_\xi > 0$. ავიღოთ როზენბლატ-პარზენის შეფასება განაწილების სიმკვრივისათვის:

$$\hat{p}(x) = \frac{a_n}{n}\sum_{i=1}^{n} K(a_n(x - X_i))$$

და

$$\hat{p}'(x) = \frac{a_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n} K'(a_n(x - X_i)).$$

მაშინ, როგორც წინა პარაგრაფებში შედეგებიდან გამომდინარეობს, ლოგარითმული წარმოებულის ძალდებული შეფასება იქნება

$$\hat{L}(x) = \frac{1}{a_n}\frac{\sum_{i=1}^{n} K(a_n(x - X_i))}{\sum_{i=1}^{n} K'(a_n(x - X_i))}.$$

გულის შეფასებისათვის აუცილებელი პირობებიც ზემოთაა მოცემული.

ანალოგიურადაა საქმე მრავალგანზომილებიან შემთხვევაშიც.

ასევე შეიძლება ზემოთ მოყვანილი შედეგები გამოვიყენოთ რეგრესიის შესაფასებლად. აქ საჭიროა გამოყენებულ იქნას ნადარაია-ვატსონის შეფასებები და პროცედურები.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Мания Г. М. Статистическое оценивание распределения вероятностей. Изд-во Тбилисского Университета. Тбилиси, 1974 г.

2. Крамер Г. Математические методы статистики. Москва, 1948 г.

3. Надарая Э. А. Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Изд-во Тбилисского Университета. Тбилиси, 1983 г.

4. Devroye L., Gyorfi L. Nonparametric Density Estimation. The L_1 view. 1985.

5. Богачев В. И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. Москва, 2008.