ივ. ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტი

მათემატიკის მიმართულება

ალგებრის ქვემიმართულება

მარიკა ქიქავა

ხარისხოვან MR-ჯგუფთა თეორიის ზოგიერთი საკითხი

(სამაგისტრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი:
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა
დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი
მიხეილ ამაღლობელი

2014

სარჩევი

შესავალი

რგოლის მიმართ მოდულის ცნება აბელური ჯგუფის და ვექტორული სივრცის ცნებების ბუნებრივი განზოგადოებაა. არაერთხელ იყო ნაცადი მოდულთა თეორიის იდეების რეალიზაცია არაკომუტაციურ შემთხვევაში. თავდაპირველად შეისწავლებოდა შემთხვევა, როცა სკალართა რგოლი რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ ველია. ამასთან დაკავშირებით მივითითოთ ა. მალცევის თეორემა გრეხვის გარეშე ლოკალურად ნილპოტენტური ჯგუფების გასრულების შესახებ ([1],1949) , კარგაპოლოვ- მერზლიაკოვ- რემესლენიკოვის შრომაჯგუფთა გასრულების შესახებ ([2],1960) , გ.ბაუმსლაგის შედეგები თავისუფალ ჯგუფთა გასრულების შესახებ ([3], 1965 ; [4] 1971) , ი. კუზმინის შრომა ამოხსნად ჯგუფთა გასრულების შესახებ ([5],1972) .

სკალართა რგოლების უფრო ფართო კლასებზე გადასვლა (ე.წ. ბინომიალურ რგოლებზე) პირველად იყო განხორციელებული ფ. ჰოლის მიერ გრეხვის გარეშე ნილპოტენტურ ჯგუფებისათვის თავის საყოველთაოდ ცნობილ ნაშრომში ([6],1959) .

მეორე მხრივ, რ. ლინდონის შრომაში ([7],1960) ნებისმიერი ასოციაციური ერთეულიანი რგოლისათვის (არა აუცილებლად ბინომიალური) შემოტანილია ხარისხოვანი R-ჯგუფის ზოგადი ცნება და მიღებულია ზოგიერთი შედეგი თავისუფალი R-ჯგუფებისათვის.

ლინდონის ხარისხოვანი აბელური R-ჯგუფები ყოველთვის არ არიან R-მოდულები(იხ. ([8],1986) , სადაც დაწვრილებითაა გამოკვლეული თავისუფალი აბელური R-ჯგუფის სტრუქტურა), რაც აძნელებს ამ ცნების გამოყენებას არათავისუფალი ჯგუფების შემთხვევაში.

ნაშრომში([9],1994) , ა. მიასნიკოვმა და ვ. რემესლენიკოვმა ლინდონის აქსიომებს დაუმატეს ერთი აქსიომა (ქვაზიიგივეობა) , რომლის შედეგად აბელური ხარისხოვანი R- ჯგუფები უკვე განსაზრვრებით არიან ჩვეულებრივი R- მოდულები. ეს დაზუსტება წარმოადგენს R-მოდულის ცნების ბუნებრივ განზოგადებას არაკომუტაციურ ჯგუფებისათვის. ამ ნაშრომში შემოტანილია ხარისხოვანი MR- ჯგუფთა $\mathfrak{M}_R$ კატეგორია დაზუსტებული აზრით (

შემდგომში უბრალოდ R-ჯგუფთა კატეგორია) და გადმოცემულია ასეთ ჯგფთა თეორიის საფუძვლები.

სამაგისტრო ნაშრომი ეძღვნება ჯგუფთა შესწავლას $\mathfrak{M}_R$ კატეგორიიდან . კარგადაა ცნობილი ტენზორული ნამრავლის რგოლი, კერძოდ სკალართა რგოლის გაფართოება , მოდულთა კატეგორიაში . ნაშრომში([9],1994) განსაზღვრულია უკანასკნელი კონსტრუქციის ზუსტი ანალოგი ნებისმიერი ხარისხოვანი R-ჯგუფისათვის – ტენზორული გასრულების საკვანძო კონსტრუქცია. სამაგისტრო ნაშრმში შესწავლილია ტენზორული გასრულების ოპერაციის კომუტაციურობის საკითხები ძირითად ოპერაციებთან ჯგუფებში. განვიხილოთ R-ჯგუფთა$\{G_i, i \in I\}$ ოჯახისათვის შემდეგი ამოცანები:

(1) ვთქვათ $G_i, i \in I$, ჯგუფთა პირდაპირი ნარავლია $G = \prod_i G_i$. სწორია თუ არა , რომ $G^S = \prod_i G_i^S$? სხვა სიტყვებით კომუტაციურია თუ არა ტენზორული გასრულების ოპერაცია პირდაპირ ნამრავლებთან ?

(2) ვთქვათ $G_i, i \in I$, ჯგუფთა დეკარტული ნამრავლია $G = \overline{\prod_i G_i}$. სწორია თუ არა, რომ $G^S = \overline{\prod_i G_i^S}$?

(3) ვთქვათ ,პირდაპირი$\mathbb{G} = \{G_i(i \in I), \pi_i^j\}$ სპექტრის პირდაპირი ზღვარია $G_* = \lim_{\rightarrow} G_i$. სწორია თუ არა , რომ $G_*^S = \lim_{\rightarrow} G_i^S$?

(4) ვთქვათ , შებრუნებული $\mathbb{G} = \{G_i(i \in I), \pi_i^j\}$ სპექტრის შებრუნებული ზღვარია $G^* = \lim_{\leftarrow} G_i$. სწორია თუ არა , რომ $(G^*)^S = \lim_{\leftarrow} G_i^S$?

სამაგისტრო ნაშრომში დამტკიცებულია , რომ (1), (3) საკითხებზე პასუხი დადებითია , ხოლო (2), (4) საკითხებზე უარყოფითი.

§ 1.ხარისხოვან MR-ჯგუფთა თეორიის ძირითადი ცნებები

ხარისხოვანი MR- ჯგუფის განსაზღვრება : ნაშრომის ბოლომდე დავაფიქსიროთ ნებისმიერი ასოციაციური R რგოლი ერთეულით 1 და აგრეთვე ჯგუფი G . ვთქვათ მოცემულია R-ის მოქმედება G-ზე , ე.ი. ასახვა

$G \times R \to G$. რგოლის $\alpha \in R$ ელემენტის

$g \in G$ ელემენტზე მოქმედების შედეგს აღვნიშნავთ g^{α}-თი .

განვიხილოთ აქსიომები :

(1) $g^1 = g\ , g^0 = e, e^{\alpha} = e$;

(2) $g^{\alpha+\beta} = g^{\alpha} \cdot g^{\beta}, g^{\alpha\beta} = (g^{\alpha})^{\beta}$;

(3) $(h^{-1}gh)^{\alpha} = h^{-1}g^{\alpha}h$;

(4) $[g,h] = e \Rightarrow (gh)^{\alpha} = g^{\alpha}h^{\alpha}$ (MR-აქსიომა) .

განსაზღვრება 1. G ჯგუფს ვუწოდოთ **ხარისხოვანი R-ჯგუფი** (ან **R-ჯგუფი**) **ლინდონის აზრით** , თუ R რგოლის მოქმედება G-ზე (1)-(3) აქსიომებს აკმაყოფილებს .

განსაზღვრება 2. G ჯგუფს ვუწოდოთ MR-ხარისხოვანი ჯგუფი (ან MR-ჯგუფი) მიასნიკოვ-რემესლენიკოვის აზრით , თუ R რგოლის მოქმედება G-ზე (1)-(4) აქსიომებს აკმაყოფილებს . ამ შემთხვევაში R-ს ეწოდება G ჯგუფის სკალართა რგოლი .

ვთქვათ $\mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ და $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ ლონდონის ხარისხოვან R-ჯგუფთა და მიასნიკოვ-რემესლენიკოვის ხარისხოვან MR- ჯგუფთა კლასებია . ცხადია , რომ $\mathcal{L}_{\mathrm{R}} \supseteq \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$.

შენიშვნა . განსაზღვრება 2-ის თანახმად ყოველი აბელური MR- ჯგუფი R-მოდულია და პირიქით . მაგრამ , როგორც [9]-შია აღნიშნული , $\mathcal{L}_{\mathrm{R}}$ კლასში არსებობენ აბელური R-ჯგუფები , რომლებიც არ არიან R-მოდულები . ამგვარად ,$\mathcal{L}_{\mathrm{R}} \neq \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$. შემდგომში R-ჯგუფების ქვეშ ვგულისხმობთ MR-ჯგუფებს .

ხარისხოვან ჯგუფთა ბუნებრივი მაგალითების უმეტესი ნაწილი $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ კლასშია :

1) ნებისმიერი ჯგუფი $\mathbb{Z}$-ჯგუფია ;
2) გაყოფადი აბელური ჯგუფი $\mathbb{Q}$-ჯგუფია ;
3) ჯგუფი m პერიოდით $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-ჯგუფია ;

4) მოდული R რგოლის მიმართ აბელური R-ჯგუფია ;

5) ნებისმიერი ხარისხოვანი ნილპოტენტური R-ჯგუფი ბინომიალური რგოლის მიმართ , რომელიც შემოტანილია ფ. პოლის მიერ [6] – ში , R-ჯგუფია ;

6) ნებისმიერი პრო-p-ჯგუფი $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-ჯგუფია მთელ p-ადურ რიცხვთა $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ რგოლის მიმართ .

სიზუსტე და გრეხვა . ვთქვათ G R-ჯგუფია , შემოვიტანოთ აღნიშვნები :

$$x^R = \{x^\alpha | \alpha \in R\}, x \in G \, ; \; X^R = \bigcup_{x \in X} x^R \, , X \subseteq G \, .$$

განსაზღვრება 3. ელემენტი $0 \neq \alpha \in R$ ზუსტად მოქმედებს G-ზე , თუ $G^\alpha \neq \{e\}$. სკალართა R რგოლი ზუსტად მოქმედებს G-ზე (R ზუსტი სკალართა რგოლია) , თუ R რგოლის ყოველი არანულოვანი ელემენტი ზუსტად მოქმედებს G-ზე .

განსაზღვრება 4. ელემენტი $g \in G$ **პერიოდულია** , თუ $g^\alpha = e$ რომელიღაც

$0 \neq \alpha \in R$, ამასთან მარჯვენა

$$O(g) = \{\alpha \in R | g^\alpha = e\}$$

იდეალს R-ში ეწოდება g ელემენტის რიგითი იდეალი . ჯგუფი , რომელიც არ შეიცავს არანულოვან პერიოდულ ელემენტებს , ეწოდება **გრეხვის გარეშე** R-ჯგუფი .

არ არის რთული დასამტკიცებელი შემდეგი დებულებები :

1) ჯგუფი R-გრეხვის გარეშე ზუსტი R-ჯგუფია .

2) ვთქვათ $\neq g \in G$. თუ α შებრუნებადი ელემენტია R-ში , მაშინ $g^\alpha \neq e$.
ამ დებულებებიდან გამომდინარეობს

3) თუ R ტანია , მაშინ ყოველი R-ჯგუფი ზუსტი R-ჯგუფია R-გრეხვის გარეშე .

4)

R-ქვეჯგუფები და იდეალები . ვთქვათ G R-ჯგუფია ,

განსაზღვრება 5. $\mathrm{H} \leq G$ **ქვეჯგუფს** ეწოდება R-**ქვეჯგუფი** , თუ $H^R = H$.
ქვეჯგუფი $\mathrm{H} \leq G$

R-წარმოქმნილია $X \subseteq G$ სიმრავლით , თუ H უმცირესი R-ქვეჯგუფია , რომელიც X-ს მოიცავს ; ამ შემთხვევაში ვწერთ $H = \langle X \rangle_R$.

5) ვთქვათ $X \subseteq G$ და $X_0 = \langle X \rangle$, $X_{n+1} = \langle X_n^R \rangle$,

სადაც $\langle X \rangle$ ქვეჯგუფია (მაგრამ არა R-ქვეჯგუფი !) , რომელიც X სიმრავლითაა წარმოქმნილი . მაშინ

$$\langle X \rangle = \cup_{n=0}^{\infty} X_n \ .$$

6) თუ $\mathrm{H} \trianglelefteq G$, მაშინ $\langle H \rangle_R \trianglelefteq G$. მართლაც , 4)-ის თანახმად

$$\langle H \rangle_R = \cup_{n=0}^{\infty} H_n \ ,$$

სადაც $H_{n+1} = \langle H_n^R \rangle$ აქსიომა (3)-ის ძალით და ინდუქციით n-ის მიმართ ნებისმიერი $x \in G$. გვექნება $x^{-1} H_{n+1} x = \langle (x^{-1} H x)^R \rangle = \langle H_n^R \rangle$.

ამგვარად ,

$$x^{-1} \langle H \rangle_R x = \cup_{n=0}^{\infty} x^{-1} H_n \, x = \cup_{n=0}^{\infty} H_n = \langle H \rangle_R \, .$$

შევნიშნოთ , რომ ყოველი H ნორმალური R-ქვეჯგუფისათვის G-დან G/H ფაქტორ-ჯგუფს არ გააჩნია R-ჯგუფის სტრუქტურა . ქვემოთ შემოტანილია G ჯგუფის H იდეალის ცნება , რომელიც ადგენს ნორმალურ R-ქვეჯგუფისათვის H-ის იმ პირობებს , რომელთა შედეგად შესაძლებელია G/H-ზე

R-სტრუქტურის ინდუცირება .

განსაზღვრება 6. ვთქვათ $G \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$. მაშინ H ნორმალურ R-ქვეჯგუფს ეწოდება

$\mathcal{L}_{\mathrm{R}}$-იდეალი , თუ $(gh)^{\alpha} \in g^{\alpha} H$ ნებისმიერი $g \in G$, $h \in H$, $\alpha \in R$.

განსაზღვრება 7. ჰომომორფიზმს $\varphi\colon G \to G'$ ეწოდება R-ჰომომორფიზმი , თუ

$(g^{\alpha})^{\varphi}$=$(g^{\varphi})^{\alpha}$ $\forall g \in G$, $\alpha \in R$.

7) $G, G' \in \mathcal{L}_R$ ჯგუფებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები :

(1) თუ $\varphi: G \to G'$ R-ჰომომორფიზმია , მაშინ $\ker\varphi$ $\mathcal{L}_R$-იდეალია G-ში ;

(2) თუ $H - \mathcal{L}_R$-იდეალია G-ში , მაშინ R-ის მოქმედება G-ზე ინდუცირებს R-ის მოქმედებას G/H-ზე წესით

$$(gH)^\alpha = g^\alpha H \, , g \in G \, ,$$

რომლის შედეგად G/H უკვე $\mathcal{L}_R$- ჯგუფია .

$\mathfrak{M}_R$-იდეალის განსაზღვრისათვის ჩვენ დაგვჭირდება ზოგიერთი წინასწარი ცნებები .

განსაზღვრება 8. თუ $g, h \in G, \alpha \in R$, მაშინ ელემენტს

$$(g,h)_\alpha = h^{-\alpha} g^{-\alpha} (gh)^\alpha$$

ვუწოდოთ g და h ელემენტების α-კომუტატორი .

გასაგებია , რომ $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha (g,h)_\alpha$, $G \in \mathfrak{M}_R \Leftrightarrow ([g,h] = 1 \longrightarrow \forall \alpha \, (g,h)_\alpha = 1)$.

უკანასკნელ ექვივალენტობას მივყავართ $\mathfrak{M}_R$-იდეალის განსაზღვრებამდე .

განსაზღვრება 9. ვთქვათ $G \in \mathcal{L}_R$. ნორმალურ R-ქვეჯგუფს $H \trianglelefteq G$ ეწოდება $\mathfrak{M}_R$-იდეალი , თუ ნებისმიერი $g \in G,\ h \in H$, $\alpha \in R$ გვაქვს

$$[g,h] \in H \Rightarrow (g,h)_\alpha \in H \, .$$

წინადადება 1.1. ვთქვათ $G \in \mathcal{L}_R$. მაშინ

1) თუ $H - \mathfrak{M}_R$-იდეალია G-ში , მაშინ $H - \mathcal{L}_R$-იდეალია G-ში ;
2) თუ $\varphi: G \to G'$ ჯგუფთა R- ჰომომორფიზმია $\mathfrak{M}_R$-დან , მაშინ $\ker\varphi$ $\mathfrak{M}_R$-იდეალია G-ში ;
3) თუ $H - \mathfrak{M}_R$-იდეალია G-ში , მაშინ $G/H \in \mathfrak{M}_R$.

დამტკიცება . 1) ვთქვათ $H - \mathfrak{M}_R$-იდეალია G-ში . მაშინ თუ $g \in G,\ h \in H, \alpha \in R$ გვექნება

$(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha (g,h)_\alpha$. რადგან $H \trianglelefteq G$, ამიტომ $[g,h] \in H$ და , მაშასადამე ,

$(g,h)_\alpha \in H$. ამგვარად , $h^\alpha (g,h)_\alpha \in H$ და $(gh)^\alpha \in g^\alpha H$, ე.ი. $H - \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$-იდეალია G-ში .

2) ვთქვათ $\varphi: G \to G'$ ჯგუფთა R- ჰომომორფიზმია $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-დან . მაშინ $H = \ker \varphi$ ნორმალური R-ქვეჯგუფია G-ში . თუ $[g,h] \in H$, მაშინ

$$[g^\varphi, h^\varphi] = [g,h]^\varphi = 1 .$$

ამის გამო G' ჯგუფში ადგილი აქვს ტოლობას

$$(g^\varphi, h^\varphi)_\alpha = 1 .$$

ამგვარად , $(g,h)_\alpha^\varphi = (g^\varphi, h^\varphi)_\alpha = 1$, ე.ი. $(g,h)_\alpha \in H$ და მაშასადამე ,

$H - \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-იდეალია G-ში .

3) თუ $H - \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-იდეალია G-ში , მაშინ პუნქტი 1)-ის ძალით $H - \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$-იდეალია G-ში და , მაშასადამე , $G/H \in \mathcal{L}_{\mathrm{R}}$. $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$-იდეალის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს

$$[g,h] \in H \Rightarrow (g,h)_\alpha \in H \quad \forall \alpha \in R ,$$

ეს კი $G/$ H-ში (4) აქსიომის შესრულების ტოლფასია . ■

§ 2.ხარისხოვან MR-ჯგუფთა კატეგორია

ძირითადი ოპერაციები . ვთქვათ R ნებისმიერი ასოციაციური რგოლია ერთეულით . მაშინ **ხარისხოვან R-ჯგუფთა (ლინდონის აზრით R-ჯგუფთა) $\mathfrak{M}_R(\mathfrak{L}_R)$ კლასი კატეგორიაა** , **რომლის მორფიზმები ჯგუფთა**

R- **ჰომომორფიზმებია** .

ქვემოთ იქნება ნაჩვენები , რომ $\mathfrak{L}_R$ და $\mathfrak{M}_R$ კლასები ჩაკეტილია პირდაპირი და დეკარტული ნამრავლების , პირდაპირი და შებრუნებული ზღვრების მიმართ .

ვთქვათ $G_i \in \mathfrak{L}_R$, $i \in I$. სიმბოლოებით $\overline{\prod} G_i$ და $\prod G_i$ აღვნიშნავთ შესაბამისად G_i ჯგუფთა დეკარტულ და პირდაპირ ნამრავლებს . ვთქვათ $g \in \overline{\prod} G_i$, $g = (\dots, g_i, \dots)$, $\alpha \in R$. განვსაზღვროთ R-ის მოქმედება G-ზე კოორდინატულად $g^\alpha = (\dots, g_i^\alpha, \dots)$.

წინადადება 2.1. კლასები $\mathfrak{L}_R$ და $\mathfrak{M}_R$ ჩაკეტილია პირდაპირი და დეკარტული ნამრავლების მიმართ .

დამტკიცება . უშუალოდ მოწმდება , რომ თუ ყველა G_i ჯგუფი აკმაყოფილებს (1)-(4) აქსიომიდან ერთ-ერთს , მაშინ $\overline{\prod} G_i$ და $\prod G_i$ ჯგუფებიც აკმაყოფილებენ ამ აქსიომას . ■

თუ პირდაპირ და შებრუნებულ სპექტრთა განსაზღვრებებში მხოლოდ R-ჰომომორფიზმებს განვიხილავთ , მაშინ არ არის ძნელი დასამტკიცებელი .

წინადადება 2.2 კლასები $\mathfrak{L}_R$ და $\mathfrak{M}_R$ ჩაკეტილია პირდაპირი და შებრუნებულ ზღვართა მიმართ .

მონოგრაფია [10] –ში დამტკიცებულია , რომ აბელურ ჯგუფთა კატეგორიაში ჯგუფთა პირდაპირი ნამრავლის , ჯგუფთა პირდაპირი და შებრუნებულ ზღვართა ოპერაციებს გააჩნიათ უნივერსალური თვისება . ანალოგიური თვისებები გააჩნიათ აგრეთვე შესაბამის ოპერაციებს ხასისხოვან MR-ჯგუფთა კატეგორიაში .

დამტკიცებისათვის საკმარისია გავიმეოროთ მსჯელობები [10] მონოგრაფიიდან . ამის გამო ჩვენ შემოვიფარგლებით შესაბამისი უნივერსალური თვისებების ჩამოყალიბებით .

წინადადება 2.3. (პირდაპირ ნამრავლთა უნივერსალური თვისება) . ვთქვათ

$$\varphi_i : G_i \to H$$

R-ჰომომორფიზმია , $i \in I$. მაშინ დიაგრამებში

$$
\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \prod_i G_i \arrow[dl, "\psi"] \\
H &
\end{tikzcd}
\qquad (i \in I), \qquad (2.1)
$$

შადაც ρ_i ჩადგმებია და $[\varphi_i(G_i), \varphi_j(G_j)] = e$, $i \neq j$, პუნქტორული ისრის ადგილას შეიძლება დავსვათ ცალსახად განსაზღვრული ისეთი R-ჰომომორფიზმი ψ

(არდამოკიდებული i-ზე) , რომ ყველა დიაგრამა გახდება კომუტაციური .

აღვნიშნოთ $G_* = \lim_{\rightarrow} G_i$ სიმბოლოთი პირდაპირი $\mathbb{G} = \{G_i(i \in I); \pi_i^j\}$ სპექტრის ზღვრული ჯგუფი .

წინადადება 2.4. ა) არსებობენ ისეთი R-ჰომომორფიზმები $\pi_i{:}G_i \to G_*$ $(i \in I)$, რომ ყველა

$$
\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\pi_i^j"] \arrow[d, "\pi_i"'] & G_j \arrow[dl, "\pi_j"] \\
G_* &
\end{tikzcd}
\qquad (i \leq j) \qquad (2.2)
$$

დიაგრამა კომუტაციურია .

ბ) ჯგუფები $Im\pi_i$ ერთობლიობაში ფარავენ G_*-ს .

გ) (პირდაპირ ზღვართა უნივერსალური თვისება) . თუ მოცემულია R-ჰომომორფიზმები $\sigma_i: G_i \to H$, რომელთათვისაც დიაგრამები

$$
\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\pi_i^j"] \arrow[d, "\sigma_i"'] & G_j \arrow[dl, "\sigma_j"] \\
H &
\end{tikzcd}
\qquad (i \leq j) \qquad (2.3)
$$

კომუტაციურია , მაშინ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ისეთი $\sigma\colon G_* \to H$ ჰომომორფიზმი , რომ ყველა

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\pi_i"'] & H \arrow[dl, "\sigma"] \\ G_* & \end{tikzcd} \qquad (i \in I) \qquad (2.4)$$

დიაგრამა კომუტაციურია .

აღვნიშნოთ G^*=lim$_{\leftarrow} G_i$ სიმბოლოთი შებრუნებული $\mathbb{G} = \{G_i(i \in I), \pi_i^j\}$ სპექტრის ზღვრული ჯგუფი .

წინადადება 2.5. **ა)** არსებობენ ისეთი R-ჰომომორფიზმები $\pi_i\colon G^* \to G_i$ $(i \in I)$, რომ ყველა

$$\begin{tikzcd} G_* \arrow[d, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ G_j \arrow[r, "\pi_i^j"'] & G_i \end{tikzcd} \qquad (2.5)$$

დიაგრამა კომუტაციურია .

ბ) (შებრუნებულ ზღვართა უნივერსალური თვისება) . თუ H R-ჯგუფია და $\sigma_i\colon H \to G_i$ R-ჰომომორფიზმებია , რომელთათვისაც ყველა

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, "\sigma_j"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ G_j \arrow[r, "\pi_i^j"'] & G_i \end{tikzcd} \qquad (i \leq j) \qquad (2.6)$$

დიაგრამა კომუტაციურია , მაშინ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ისეთი

$\sigma: H \to G^*$ ჰომომორფიზმი , რომლისთვისაც ყველა

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma_i"'] & G^* \arrow[d, "\pi_i"] \\ & G_i \end{tikzcd} \qquad (i \in I) \qquad (2.7)$$

დიაგრამა კომუტაციურია .

ხარისხოვან ჯგუფთა ზეკატეგორიები და ქვეკატეგორიები . შემდგომში ტექნიკურად მოხერხებული იქნება ხარისხოვან MR-ჯგუფთა ზოგიერთი ზეკატეგორიისა და ქვეკატეგორიის განხილვა . მაგალითად , თუ MR-ჯგუფის განსაზღვრებაში უარს ვიტყვით (4) აქსიომაზე , მივიღებთ ლინდონის $\mathfrak{L}_R \supset \mathfrak{M}_R$ ზეკატეგორიას . თუ ამასთან ერთად უარს ვიტყვით (3) აქსიომაზე , მივიღებთ კიდევ უფრო დიდ ზეკატეგორიას $\mathcal{K}_R \supset \mathfrak{L}_R$. მეორე მხრივ , შეიძლება ხარისხოვანი ჯგუფის ზოგად ცნების დაზუსტება (1)-(4) აქსიომაზე რაიმე სხვა აქსიომების დამატებით (მაგალითად , მისი ადაპტირება ამა თუ იმ სპეციალურ ჯგუფთა მრავალსახეობებისადმი) . ამ გზით ჩნდება ჰოლის [6] ნილპოტენტურ MR-ჯგუფთა $\mathcal{H}_R$ კატეორია . ბევრი აგება $\mathfrak{M}_R$ და $\mathfrak{L}_R$ კატეგორიებში მოხერხებულია ვაწარმოოთ ბიჯებით , თანდათან „ხარისხების განსაზღვრით" . ამას მივყავართ ნაწილობრივ R-ჯგუფის ცნებამდე .

განსაზღვრება 10. G ჯგუფს ვუწოდოთ **ნაწილობრივი MR-ჯგუფი** , თუ ხარისხში აყვანა შესაძლებელია ზოგიერთი (g,α) წყვილისათვის , ამასთან სრულდება ხარისხოვანი ჯგუფის (1)-(4) აქსიომები , თუ მათში განსაზღვრულია ტოლობების ორივე ნაწილი .

მაგალითი . ვთქვათ R ქვერგოლია S-ში . მაშინ ნებისმიერი R-ჯგუფი ნაწილობრივი S-ჯგუფია .

ნაწილობრივ MR- ჯგუფთა კლასი აღვნიშნოთ $\mathcal{P}_R$ სიმბოლოთი .

ვთქვათ $G, H \in \mathcal{P}_R$. ჯგუფთა $\varphi: G \to H$ ჰომომორფიზმს ვუწოდოთ **ნაწილობრივი** R**- ჰომომორფიზმი** , თუ $(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^\alpha$ ყველა იმ (g, α) წყვილისათვის , რომლისთვისაც განსაზღვრულია g^α ელემენტი .

უშუალოდ მოწმდება , რომ $\mathfrak{M}_R$-თვის $\mathcal{P}_R$ ზეკატეგორიაა . ამასთან , ცხადია , რომ $\mathcal{P}_R$ ჩაკეტილია ქვეჯგუფების აღების მიმართ და შეიცავს ერთეულოვან ჯგუფს .

წინადადება 2.6. $\mathcal{P}_R$ კატეგორიაში არსებობენ პირდაპირი , დეკარტული და თავისუფალი ნამრავლები , აგრეთვე პირდაპირი და შებრუნებული ზღვრები .

დამტკიცება . დამტკიცებისათვის საკმარისია არსებულ უნივერსალურ ობიექტებში „თანდათან" ისე განვსაზღვროთ R რგოლის მოქმედება , რომ არსებული ჯგუფთა ჰომომორფზმები გახდნენ ნაწილობრივი

R-ჰომომორფიზმები . ■

§ 3. ტენზორული გასრულების ფუნქტორი

ამ პარაგრაფში შეისწავლება ძირითადი ოპერაცია ხარისხოვან MR-ჯგუფთა კლასში – **ტენზორული გასრულება** . ის სკალართა რგოლის გაფართოების ცნებას მოდულებისათვის [11] ბუნებრივად აზოგადებს არაკომუტაციურ შემთხვევაში . ასეთი გაფართოების იდეები ნილპოტენტურ ჯგუფთა კლასში გადმოცემულია ნაშრომში [12] . ტენზორული გასრულება არსებითად გამოიყენება ხარისხოვან R-ჯგუფთა კატეგორიაში თავისუფალი კონსტრუქციების განსაზღვრებისათვის R-თავისუფალი ჯგუფის ცნების ჩათვლით .

განსაზღვრება 11. ვთქვათ $G - R$-ჯგუფია , $\mu: R \to S$ რგოლთა ჰომომორფიზმი . მაშინ S-ჯგუფს $G^{S,\mu}$-ს ეწოდება R-ჯგუფის G-ს **ტენზორული** S**-გასრულება** , თუ $G^{S,\mu}$ აკმაყოფილებს შემდეგ უივერსალურ თვისებას :

1) არსებობს ისეთი R-ჰომომორფიზმი $\lambda: G \to G^{S,\mu}$, რომ $\lambda(G)$ S-წარმოდგენის $G^{S,\mu}$-ს , ე.ი.

$$\langle \lambda(G) \rangle_S = G^{S,\mu} ;$$

2) ნებისმიერი H S-ჯგუფისათვის და ნებისმიერი R-ჰომომორფიზმისათვის $\varphi: G \to H$, რომელიც μ-თან შეთანხმებულია (ე.ი. $(g^{\alpha})^{\varphi} = (g^{\varphi})^{\mu(\alpha)}$) , არსებობს S-ჰომომორფიზმი $\psi: G^{S,\mu} \to H$, რომელიც კომუტაციურს ხდის დიაგრამას

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\forall\varphi"'] & G^{S,\mu} \arrow[dl, "\exists\psi"] \\ H & \end{tikzcd} , \qquad (\lambda\psi = \varphi) .$$

თუ G აბელური R-ჯგუფია , მაშინ $G^{S,\mu}$ აგრეთვე აბელურია [9] , ე.ი. S-მოდულია ; ამის გარდა , $G^{S,\mu}$ აკმაყოფილებს იმავე უნივერსალ თვისებას , რომელსაც R-მოდული G-ს S რგოლზე ტენზორული $G \otimes_R S$ ნამრავლი . მაშასადამე ,

$$G^{S,\mu} \cong G \otimes_R S .$$

არსებობა და ერთადერთობა . შემდგომში რგოლთა $\mu: R \to S$ ჰომომორფიზმი იქნება ფიქსირებული და ამის გამო $G^{S,\mu}$-ს ნაცვლად დამტკიცებებში დავწერთ G^S-ს .

წინადადება 3.1. ვთქვათ $G - R$- ჯგუფია , $\mu: R \to S$ რგოლთა ჰომომორფიზმი . მაშინ არსებობს G^S ტენზორული გასრულება .

დამტკიცება . ვთქვათ $\{\varphi_i | i \in I\}$ μ-თან შეთანხმებული ყველა იმ R-ჰომომორფიზმთა $\varphi_i: G \to H_i$ სიმრავლეა , სადაც H_i S-ჯგუფია და H_i

S-წარმოიქმნება $\varphi_i(G)$ სიმრავლით . აღვნიშნოთ $G_\circ$-ით H_i , $i \in I$, ჯგუფთა დეკარტული ნამრავლი : $G_\circ = \overline{\Pi}_{i \in I} H_i$. მაშინ $G_\circ - S$-ჯგუფია , ხოლო ასახვა

$i: G \to G_\circ$, $i: g \to (\dots, \varphi_i(g), \dots)$, R-ჰომომორფიზმია . განვიხილოთ $G_\circ$-ში $i(G)$ სიმრავლის მიერ წამოქმნილი S- ჯგუფი $G^S = \langle i(G) \rangle_S$. ვაჩვენოთ , რომ G^S არის G-ს საძიებელი ტენზორული S-გასრულება . ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ , რომ G^S -ს გააჩნია შესაბამისი უნივერსალური თვისება . რადგან უნივერსალური თვისების პირველი მოთხოვნა G^S-ის აგებით

სრულდება, ამიტომ შევამოწმოთ მეორე მოთხვნის შესრულება . ვთქვათ $\varphi: G \to H$ μ-თან შეთანხმებული ნებისმიერი R-ჰომორფიზმია R-ჯგუფი G-დან S-ჯგუფში H . ვთქვათ $H_\circ = \langle \varphi(G) \rangle_S \leq H$ მაშინ $H_\circ \cong H_i$ რომელიღაც $i \in I$ და $\varphi = \varphi_i$. ავაგოთ დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi = \varphi_i"'] & G^S \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\pi"'] & G_0 \arrow[d, "\pi_i"] \\
H & H_0 \arrow[l, "\tau"] & H_i \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd},$$

სადაც ψ იზომორფიზმია H_i და H_0 ჯგუფებს შორის , რომელიც განსაზღვრავს φ_i და φ-ს ექვივალენტობას . ε და τ ჩადგმებია ,

$\pi_i: \bar{\Pi} H_i \to H_i$ კანონიკური გეგმილებია და $\pi = (\pi_i | G^S)$. მაშინ $\pi\varepsilon$ საძიებელი μ-თან შეთანხმებული S-ჰომომორფიზმია , რომელიც მოცემულ დიაგრამას აქცევს კომუტაციურად . ■

წინადადება 3.2. ვთქვათ $G - R$-ჯგუფია , $\mu: R \to S$ რგოლთა ჰომომორფიზმი . მაშინ G-ს ტენზორული S-გასრულება S-იზომორფიზმამდე სიზუსტით ერთადერთია .

დამტკიცება . ვთქვათ, G_1, G_2 μ-ს მიმართ G ნებისმიერი ორი S-გასრულებაა . მაშინ განსაზღვრებით არსებობენ ψ_1 და ψ_2

S-ჰომომორფიზმები , რომლებიც კომუტაციურს ხდიან დაიაგრამებს

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "\lambda_2"'] & G_1 \arrow[dl, shift right, "\psi_1"'] \\
G_2 \arrow[ur, shift right, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

ვთქვათ $f_1 = \psi_1\psi_2$ და $f_2=\psi_2\psi_1$. რადგან f_i იგივურია $\lambda_i(G)$-ზე და $\lambda_i(G)$ S-წარმოქმნიან G_i-ს , ამიტომ $f_i = id$, ე.ი. ψ_1 და ψ_2 ურთიერთ შებრუნებული S-ჰომომირფიზმებია . ■

($ker\varphi_i = ker\varphi$ და არსებობს S-ჰომომორფიზმი $\psi: H_i \to H_0$, რომ $\varphi\varphi_i(g) = \varphi(g)$ ყველა $g \in G$) .

გამოყენებებში μ უფრო ხშირად იქნება რგლთა ჩადგმა , მაგრამ ამ შემთხვევაშიც კი R-ჰომომორფიზმი $\lambda: G \to G^{S,\mu}$ ყოველთვის არაა ჩადგმა . იზომორფული ჩადგმის ზოგიერთი შესწავლილია ნაშრომში [9] . ქვემოთ მოყვანილი წინადადება აღწერს სიტუაციას , როცა λ ჩადგმაა .

განსაზღვრება 12. ვიტყვით , რომ R-ჯგუფი **აპროქსიმირდება** S-ჯგუფებით μ ჰომომორფიზმის მიმართ , თუ ნებისიერი $e \neq g \in G$ ელემენტისათვის არსებობს μ-თან შეთანხმებული G-ს R-ჰომომორფიზმი φ_g რომელიღაც S-ჯგუფ H-ში , ისეთი რომ $\varphi_g(g) \neq e$.

წინადადება 3.3. ([13]) . ვთქვათ R-ჯგუფი G აპროქსიმირდება S-ჯგუფებით μ ჰომომორფიზმის მიმართ . მაშინ R-ჰომომორფიზმი $\lambda: G \to G^S$ ჩადგმაა .

დამტკიცება . ვთქვათ $e \neq g \in G$ და $\varphi_g: G \to H$ ისეთი μ-თან შეთანხმებული R-ჰომომორფიზმია , რომ $\varphi_g(g) \neq e$, სადაც $H = \langle\varphi_g(G)\rangle_S$. მაშინ არსებობს ისეთი S-ჰომომორფიზმი $\psi: G^S \to H$, რომ $\varphi_g = \psi\lambda$. მაშასადამე , $\lambda(g) \neq e$. ■

კატეგორიათა თეორიის ენაზე გასრულების ზემოთ აღწერილი ოპერაცია გამოდის როგორც **ტენზორული გასრულების ფუნქტორი** .

ვთქვათ $\mu: R \to S$ რგოლთა ჰომომორფიზმია . ამ ჰომომორფიზმის ბაზაზე ავაგოთ $\Theta^{S,\mu}$ (შემდეგ დავწეროთ Θ^S) ფუნქტორი , რომელიც დააკავშირებს ხარისხოვან R-ჯგუფთა $\mathfrak{M}_R$ კატეგორიას ხარისხოვან S-ჯგუფთა $\mathfrak{M}_S$ კატეგორიებთან . ობიექტზე ასახვა $\Theta^S: \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_S$ განისაზღვრება ფორმულით $\Theta^S(G) = G^S$, სადაც $G - R$-ჯგუფია , ხოლო $G^S - G$ ჯგუფის μ-ს მიმართ S-გასრულება .

განვსაზღვროთ Θ^Sასახვა $\mathfrak{M}_R$ კატეგორიის მორფიზმებზე . განვიხილოთ

R-ჰომომორფიზმი $\varphi: G \to H$, სადაც $G, H \in \mathfrak{M}_R$. ვთქვათ $\lambda_G: G \to G^S$ და $\lambda_H: H \to H^S$ კანონიკური ასახვებია . რადგან $\varphi \circ \lambda_H$ კომპოზიცია μ-თან შეთანხმებული R-ჰომომორფიზმია G-დან H^S-ში , არსებობენ S-ჰომომორფიზმები ψ და φ^S, რომლებიც კომუტაციურს ხდის

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda_G"'] \arrow[dr, "\psi"] & H \arrow[d, "\lambda_H"] \\
G^S \arrow[r, "\varphi^S"'] & H^S
\end{tikzcd}$$

დიაგრამას . ვთქვათ $\Theta^S(\varphi) = \varphi^S$.

წინადადება 3.4. ვთქვათ $\mu: R \to S$ რგოლთა ჰომომორფიზმია . მაშინ Θ^S კოვარიანტული ფუნქტორია $\mathfrak{M}_R$ კატეგორიიდან $\mathfrak{M}_S$ კატეგორიაში .

დამტკიცება . მაგალითისათვის დავამტკიცოთ ფუნქტორის განსაზღვრის ერთ-ერთი აქსიომა . ვთქვათ $H = G$ და φ=1_G . ვაჩვენოთ , რომ ამ შემთხვევაში $(1_G)^s = 1_{G^S}$.

მართლაც , ვთქვათ $\lambda: G \to G^S$ კანონიკური ჰომომორფიზმია . მაშინ $(1_G)^S$-ის შეზღუდვა $\lambda(G)$-ზე იგივურია . რადგან $G^S = \langle \lambda(G) \rangle_S$, ამიტომ $(1_G)^S$ იქნება იგივური ასახვა მთელ G^S ჯგუფზე .

ანალოგიურად მოწმდება ფუნქტორის განმსაზღვრელი დანარჩენი აქსიომები .

■

ვთქვათ R , S , T რგოლთა ჰომომორფიზმების მიმდევრობაა $R \overset{\mu_1}{\to} S \overset{\mu_2}{\to} T$. აღვნიშნოთ $\mu = \mu_1\ \mu_2$:$R \to T$. ეს სამი ჰომომორფიზმი განსაზღვრავს ფუნქტორთა სამეულს

$$\Phi^{S,\mu_1}: \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_S\ ,\ \Phi^{T,\mu_2}: \mathfrak{M}_S \to \mathfrak{M}_T\ ,\ \ \Phi^{T,\mu}: \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_T$$

ბუნებრივი გზით განისაზღვრება ფუნქტორთა $\Phi^{S,\mu_1} \circ \Phi^{T,\mu_2}$ კომპოზიცია . მოწმდება , რომ სამართლიანია

წინადადება 3.5. ზემოთ შემოტანილ აღნიშვნებში

$$\Phi^{S,\mu_1} \circ \Phi^{T,\mu_2} = \Phi^{T,\mu} \ .$$

ვთქვათ , ახლა $\mu: R \to S$ რგოლთა ნებისმიერი ჰომომორფიზმია და $Im\mu = S_0$. მაშინ μ ჰომომორფიზმი კანონიკურად იშლება $\mu_1: R \to S_0$ ეპიმორფიზმისა და $\mu_2: S_0 \to S$ მონომორფიზმის ნამრავლად . წინადადება 3.5-ის ძალით გვაქვს

$$\Phi^{S,\mu} \circ \Phi^{S_0,\mu_1} = \Phi^{S,\mu_2} .$$

ამ შემთხვევაში ვგულისხმობთ **ტენზორული გასრულების ფუნქტორის კანონიკურ დაშლას** . ამის გამო ტენზორული გასრულების კონსტრუქციასთან დაკავშირებული თეორემის დამტკიცებები ბუნებრივად დაიყვანება ორი შემთხვევის გარჩევაზე :

$a)$ როცა μ რგოლთა ეპიმორფიზმია ;

$b)$ როცა μ რგოლთა ჩადგმაა .

§ 4.ტენზორული გასრულების კონსტრუქცია

ამ პარაგრაფში მოცემულია ტენზორული გასრულების კონსტრუქციის კონკრეტული ხერხი , რომელიც იყენებს კომბინატორულ ჯგუფთა თეორიის ტექნიკას .

ამ კონსტრუქციის ყველაზე უფრო გამოყენებადი კერძო შემთხვევები მოყვანილია [13]-ში .

$a)$ $\mu: R \to S$ ეპიმორფიზმია . ამ შემთხვევაში $S = R/M$ სადაც $M = ker\mu$. ვთქვათ G ნებისმიერი R-ჯგუფია ,

$$G_0 = \{g \in G | \exists f \in G, \alpha \in M, g = f^{\alpha}\} .$$

აღვნიშნოთ $G_\mu = id(G_0)$-ით G_0-ის მიერ წარმოქმნილი $\mathfrak{M}_R$-იდეალი G-ში .

მაშინ $\bar{G} = G/G_\mu$ ფაქტორ-ჯგუფი S-ჯგუფია

S-ის $\bar{G}$-ზე ინდუცირებული მოქმედების შედეგად : $(gG_\mu)^\beta = g^\alpha G_\mu$, სადაც α ისეთი ელემენტია , რომ $\mu(\alpha) = \beta$. აღვნიშნოთ λ-თი G-ს მის $\bar{G} = G/G_\mu$

ფაქტორ-ჯგუფზე კანონიკური ჰომომორფიზმი $\lambda: G \to G/G_\mu$.

წინადადება 4.1. ვთქვათ $\mu: R \to S$ რგოლთა ეპიმორფიზმია . მაშინ

$G^{S,\mu} = G/G_\mu$, სადაც S-ჯგუფი G/G_μ ზემოთაა განსაზღვრული .

დამტკიცება . ვთქვათ $\varphi: G \to H$ ნებისმიერი μ-თან შეთანხმებული R-ჰომომორფიზმია G-დან S- ჯგუფში H . მაშინ ცხადია , რომ $ker\varphi \geq G_\mu$ და ამიტომ არსებობს S-ჰომომორფიზმი $\psi: G^S \to H$, რომელიც კომუტაციურს ხდის

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\forall\varphi"'] & G|G_\mu \arrow[dl, "\exists\psi"] \\ H & \end{tikzcd}$$

დიაგრამას . ■

მაგალითი . ვთქვათ $R = \mathbb{Z}$ მთელ რიცხვთა რგოლია , $S = \mathbb{Z}_n$ მთელ რიცხვთა რგოლია მოდულით n, $\mu: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ ბუნებრივი ჰომომორფიზმი . მაშინ $G_\mu = G^n$ ქვეჯგუფია G-ში , რომელიც წარმოქმნილია G-ს ელემენტების n-ური ხარისხებით . მაშინ $G^S \cong G/G^n$ მაქსიმალური ფაქტორ-ჯგუფია პერიოდით n .

$b)$ ვთქვათ G ნაწილობრივი R-ჯგუფია ,$\mu: R \to S$ რგოლთა ჩადგმა . აღვწეროთ კონსტრუქციულად G ჯგუფის ტენზორული S გასრულება . ამისათვის წინასწარ ჩამოვაყალიბოთ ზოგიერთი ცნობილი ფაქტი გამაერთიანებელი ქვეჯგუფით თავისუფალი ნამრავლების შესახებ (იხ. , მაგალითად , წიგნი [14]) .

ვთქვათ $H_i \leq G_i$ ჯგუფებია , $i = 1,2.$ ვთქვათ , ამის გარდა , დაფიქსირებულია $\varphi: H_1 \to H_2$ ეპიმორფიზმი . G ჯგუფს ვუწოდოთ G_1 და G_2 ჯგუფების **თავისუფალი ნამრავლი** H_1 და H_2 **გამაერთიანებელი ქვეჯგუფებით** და აღვნიშნოთ

$G =* (G_1, G_{2,} H_1, H_{2,} \varphi)$, თუ G-თვის შესრულებულია შემდეგი უნივერსალური თვისება :

1) არსებობენ ისეთი $\lambda_1: G_1 \to G$, $\lambda_2: G_2 \to G$ ჰომომორფიზმები , რომ G წარმოიქმნება $\lambda_1(G_1)$ და $\lambda_2(G_2)$-ით ;
2) ნებისმიერი H ჯგუფისათვის და $\psi_1: G_1 \to H$, $\psi_2: G_2 \to H$ ჰომომორფიზმებისათვის , რომლებიც შეთანხმებულია φ-თან , არსებობს ისეთი $\Theta: G \to H$ ჰომომორფიზმი , რომ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dd, "\exists\Theta"] & \\
G_1 \arrow[ur, "\exists\lambda_1"] \arrow[dr, "\forall\psi_1"'] & & G_2 \arrow[ul, "\exists\lambda_2"'] \arrow[dl, "\forall\psi_2"] \\
& H &
\end{tikzcd} \qquad (\lambda_1 \Theta = \psi_1 \ , \ \lambda_2 \Theta = \psi_2 \ ).$$

თუ $G_1 = \langle X_1 | R_1 \rangle$, $G_2 = \langle X_2 | R_2 \rangle$ ამ ჯგუფთა მოცემაა წარმომქმნელი ელემენტებით და განმსაზღვრელი თანაფარდობებით , მაშინ ადვილიდასამტკიცებელია , რომ $G = \langle X_1 \cup X_2 | R_1 \cup R_2 \cup S \rangle$,

$S = \{h_1\varphi = h_2 | \forall\, h_1 \in H_1\}$$G$-ს მოცემაა წარმომქმნელი ელემენტებით და განმსაზღვრელი თანაფარდობებით .

შევუდგეთ G^S ტენზორული გასრულებისაგებას . გავაკეთოთ ეს ბიჯებით .

$a)$ **ელემენტარული ბიჯის აღწერა** . ვთქვათ M ნაწილობრივი R-ჯგუფი G-ს მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფია . მაშასადამე , M ნაწილობრივ R-მოდულია და ამიტომ , ნაწილობრივი S- მოდულიც .

აღვნიშნოთ $M^S \equiv M \underset{S}{\otimes} S$.

მაშინ M^S S-მოდულია და $i_M: M \to M^S$ კანონიკური ასახვა ნაწილობრივი R- ჰომომორფიზმია . აღვნიშნოთ $G^{'} \equiv * (G, M^S, M, i_M(M), i_M)$.

$g \in G$ ელემენტის $\lambda_1(g)$ ანასახისათვის (λ_1:$G \to G^{'}$) $\alpha \in S$ ხარისხში აყვანა $G^{'}$ ჯგუფში განვსაზღვროთ ფორმულით

$$\lambda_1(g)^\alpha = \lambda_1(g^\alpha)$$

იმ α-ბიჯისათვის S-დან , რომლისთვისაც g^α განსაზღვრულია G-ჯგუფში .

ანალოგიურად განისაზღვრება S-ის ნაწილობრივი მოქმედება M^S ჯგუფის $\lambda_2(M^S)$ ანასახზე $G^{'}$ ჯგუფში (λ_2:$M^S \to G^{'}$) . ადვილი გასაგებია , რომ ასეთნაირად განსაზღვრული მოქმედება კორექტულია და $G^{'}$ ნაწილობრივი ჯგუფია $\mathcal{PK}_S$ კლასიდან (შესრულებულია (1), (2) აქსიომები) .

ვთქვათ $= id_{\mathfrak{M}}(1)$, ე.ი. უმცირესი $\mathfrak{M}$-იდეალი $G^{'}$-ში , რომელიც $G^{'}/N$ ფაქტორ-ჯგუფს გადააქცევს ნაწილობრივ S-ჯგუფად . ვთქვათ $G^1 = G^{'}/N$, $\eta: G^{'} \to G^{'}/N$ კანონიკური ჰომომორფიზმია და i^1-ით აღვნიშნოთ

აწილობრივი $G \overset{i^1}{\to} G^1$ R- ჰომომორფიზმი , რომელიც $\lambda_1: G \to G^{'}$, $\eta: G^{'} \to G^{'}|N{=}G^1$

ასახვებითაა ინდუცირებული . ვამბობთ , რომ **G^1 ჯგუფი მიღებულია G-დან M ქვეჯგუფის საშუალებით $\mathfrak{M}$ ელემენტარული ბიჯის შედეგად** .

ანალოგიურად შეიძლება განისაზღვროს ელემენტარული $\mathfrak{L}$-ბიჯის ცნება $\mathcal{PL}_S$ კატეგორიაში .

ლემა (ჰომომორფიზმის გაგრძელების შესახებ) . ვთქვათ φ R-ჯგუფი G-ს ნაწილობრივი R-ჰომომორფიზმია S-ჯგუფ H-ში . მაშინ არსებობს ნაწილობრივი S-ჰომომორფიზმი $\psi: G_1 \to H$ ისეთი ,რომ

კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i^1 = \lambda_1\eta"] \arrow[d] & G^1 \arrow[dl, "\exists\psi"] \\ H & \end{tikzcd} .$$

დამტკიცება . აგების თანახმად G' ჯგუფი წარმოქმნილია $\lambda_1(G)$ და $\eta(M^S)$ ქვეჯგუფებით .ვთქვათ $i^1(G)$-თვის .$g \in G$, $\psi\big(i^1(G)\big) = \varphi(g)$. შეზღუდვა φ-ის M-ზე ინდუცირებს $M \to H$ ჰომომორფიზმს და , მაშასადამე , S-ჰომომორფიზმს $\varphi_M \colon M^S \to H$, რომელიც შეთანხმებულია

$i_M \colon M \to M^S$ჰომომორფიზმთან .

გაერთიანებული ქვეჯგუფით თავისუფალ ნამრავლთა უნივერსალური თვისება იძლევა $\psi_0 \colon G \to H$ ჰომომორფიზმს , რომელიც φ და φ_M ასახვების გაგრძელებაა . რადგან H S-ჯგუფია , ამიტომ $\mathfrak{M}$ იდეალი N მოთავსებულია ψ_0-ის ბირთვში . ამის გამო ψ_0ინდუცირებს საძიებელ $\psi \colon G^1 \to H$ ნაწილობრივ S-ჰომომორფიზმს .

G^S-ის აგება ტრანსფინიტური ინდუქციით . პირველი ელემენტარული ბიჯის შედეგი მდგომარეობს იმაში , რომ ჩვენ შეგვიძლია M მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფის ელემენტების ანასახების ხარისხში აყვანა S რგოლიდან . არაკომუტაციურ შემთხვევაში ბუნებრივია ეს აგება გავაგრძელოთ და შევასრულოთ მეორე ბიჯი , მესამე ბიჯი , … , k-ური ბიჯი , … , $k \in \mathbb{N}$, და მივიღოთ G^k ჯგუფი და ნაწილობრივი S-ჰომომორფიზმები $i^k \colon G^{k-1} \to G^k$. უკანასკნელი ჰომომორფიზმები იძლევა საშუალებას ინდექსთა ნებისმიერი (r, s), $< s$, წყვილისათვის განისაზღვროს ნაწილობრივი S-ჰომომორფიზმი

$\pi_r^s : G^r \to G^s$. სისტემა $\mathbb{G} = \{G^k, k \in \mathbb{N}, \pi_r^s(r, s)\}$ პირდაპირი სპექტრია . კონსტრუქციაში ω-ბიჯს განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად :

G^ω პირდაპირი $\mathbb{G}$ სპექტრის ზღვრული ჯგუფია , π_k^ω არის G^k ჯგუფის გეგმილი G^ω-ში . ჰომომორფიზმის გაგრძელების შესახებ ლემა ბუნებრივი სახით მტკიცდება G^ω ჯგუფისათვისაც (ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ პირდაპირი ზღვრის უნივერსალური თვისება) . თუ G^ω არ არის

S-ჯგუფი , მაშინ აგებისათვის ვდგამთ შემდეგ ნაბიჯებს :$G^{\omega+1}$=$(G^\omega)^1$, $G^{\omega+2}$=$(G^{\omega+1})^1$, $G^{\omega+3}$=$(G^{\omega+2})^1$, … . პროცედურა ყოველთვის შეიძლება ისე წარიმართოს , რომ იარსებებს ისეთი ორდინალი V , რომლისთვისაც G^V უკვე იქნება S-ჯგუფი . რადგან ყოველ ნაბიჯზე სრულდება $G^{S,\mu}$ ჯგუფის განმსაზღვრელი 1) და 2) თვისებები , ამიტომ G^V ტენზორული S-გასრულებაა G-თვის .

თუ §3-დან ტენზორული გასრულების განსაზღვრებაში $\lambda: G \to G^S$ და $\varphi: G \to H$ ასახვებში R-ჰომომორფიზმის პირობას შევცვლით ნაწილობრივი R-ჰომომორფიზმის პირობით , მივიღებთ ნაწილობრივი R-ჯგუფის ტენზორული გასრულების განსაზღვრებას . ზემოთ მოყვანილი მსჯელობები ამტკიცებენ ასეთი გასრულების არსებობას და ერთადერთობას .

§ 5.ტენზორული გასრულების ფუნქტორის კომუტაციურობა ძირითად ოპერაციებთან ჯგუფებში

ამ პარაგრაფში შეისწავლება ტენზორული გასრულების ფუნქტორის კომუტაციურობის საკითხები ჯგუფთა პირდაპირ და დეკარტულ ნამრავლებთან , ჯგუფთა პირდაპირ და შებრუნებულ ზღვრებთან . სახელდობრ ჩვენ გვაინტერესებს შემდეგი ოთხი საკითხი . ვთქვათ მოცემულია R-ჯგუფთა ოჯახი $\{G_i / i \in I\}$.

(1) ვთქვათ G_i ჯგუფთა პირდაპირი ნამრავლია $G = \prod_i G_i$. სწორია თუ არა , რომ $G^S = \prod_i G_i^S$?

სხვა სიტყვებით კომუტაციურია თუ არა ტენზორული გასრულების ფუნქტორი პირდაპირ ნამრავლებთან ?

(2) ვთქვათ G_i ჯგუფთა დეკარტული ნამრავლია $G = \overline{\Pi}_i G_i$. სწორია თუ არა , რომ $G^S = \overline{\Pi_i} G_i^s$?

(3) ვთქვათ G_i ჯგუფთა პირდაპირი ზღვარია $G_* = \lim_{\to} G_i$. სწორია თუ არა , რომ $G_*^S = \lim_{\to} G_i^S$?

(4) ვთქვათG_i ჯგუფთა შებრუნებული ზღვარია $G^* = \lim_{\leftarrow} G_i$. სწორია თუ არა , რომ $(G^*)^S = \lim_{\leftarrow} G_i^S$?

ჩვენ დავამტკიცებთ , რომ (1) და (3) საკითხზე პასუხი დადებითია , ხოლო (2) და (4)-ზე უარყოფითი .

ძირითადი შედეგები და ცნებები , რომლებსაც ქვემოთ გამოვიყენებთ , შეიძლება მოიძებნოს წიგნებში [11] , [15] .

(1) საკითხის გადაწყვეტა .

თეორემა 5.1. ტენზორული გასრულების ოპერაცია გადანაცვლებადია პირდაპირ ნამრავლთან . სხვა სიტყვებით , თუ $G = \prod_i G_i$, მაშინ

$$G^S = \prod_i G_i^S \quad . \qquad (5.1)$$

დამტკიცება . თეორემის დამტკიცებამდე ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ

ლემა . ვთქვათ ყოველი i-თვის არსებობს R-ჰომომორფიზმი $\varphi_i\colon G_i \to H$, სადაც $H - R$-ჯგუფია და აგრეთვე

$$[\varphi_i(G_i), \varphi_j(G_j)] = 1 \qquad (5.2)$$

ყველა $i\,,j$ წყვილისათვის , $i \neq j$. მაშინ არსებობს R-ჰომომორფიზმი

ψ: $\prod_i G_i \to H$, რომელიც φ_i-ს გაგრძელებაა ყველა i-თვის .

ლემის დამტკიცება . განვიხილოთ H_0=$\langle \varphi_i(G_i)\,, i \in I\, \rangle_R \leq H$. რაიმე ხერხით წრფივად დავალაგოთ ინდექსთა I სიმრავლე და დავამტკიცოთ , რომ ნებისმიერი $h \in H_0$ ელემენტი წარმოიდგინება

$h = g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_s}$, სადაც $g_{i_k} \in \varphi_{i_k}(G_{i_k}), \leq k \leq s$, (5.3) სახით , ამასთან

$i_1 < i_2 < \cdots < i_s$.

ადვილი დასანახია , რომ (5.3) სახის ელემენტები (5.2) პირობის გამო ქმნიან ქვეჯგუფს H-ში . რადგან ნებისმიერი α-თვის R-დან (4) აქსიომის ძალით

$(g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_s})^\alpha = {g_{i_1}}^\alpha {g_{i_2}}^\alpha \dots {g_{i_s}}^\alpha$,

ამიტომ (5.3) სახის ელემენტები ქმნიან R-ქვეჯგუფს H-ში . ახლა საჭირო

R-ჰომომორფიზმი ψ შემდეგნაირად აიგება .

ვთქვათ $g \in \prod_i G_i$ ჩაიწერება

$$g = (\dots, g_{i_1}, \dots, g_{i_s}, \dots)$$

სახით , სადაც წერტილების ნაცვლად G_i ჯგუფების ერთეულებია . მაშინ ავიღოთ $\psi(g) = g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_s}$.

უშუალოდ მოწმდება , რომ ψ არის R-ჰომმორფიზმი . ■

დავუბრუნდეთ თეორემის დამტკიცებას . ამისთვის G^S და $\prod_i G_i^S$ ჯგუფებს შორის ავაგოთ შემხვედრი R-ჰომომორფიზმის წყვილი . ვთქვათ

$$\lambda_i : G_i \to G_i^S$$

კანონიკური R-ჰომომორფიზმია , რომელიც ტენზორული გასრულების განსაზღვრებით მოიცემა , და გავაგრძელოთ ეს ასახვა $\prod_i G_i^S$ ჯგუფში . მაშინ გასაგებია , რომ $[\lambda_i(G_i), \lambda_j(G_j)] = 1$ როცა $i \neq j$.

წინადადება 2.3-ის თანახმად (იხ. დიაგრამა (2.1)) არსებობს R-ჰომომორფიზმი

$$\varphi : G \to \prod_i G_i^S .$$

კვლავ ტენზორული გასრულების განსაზღვრებით არსებობს R-ჰომომორფიზმი

ψ_1 , რომელიც ხდის კომუტაციურს

$$\begin{tikzcd}
G=\prod_i G_i \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi"'] & G^S \arrow[dl, "\exists\psi_1"] \\
\prod_i G_i^S &
\end{tikzcd}$$

დიაგრამას .

შევამოწმოთ , რომ $[\lambda_i(G_i),\lambda_j(G_j)]=1$.

ეს ასეა იმიტომ , რომ პირველი ჯგუფის წარმომქმნელები კომუტირებს მეორე ჯგუფის წარმომქმნელებთან . ტენზორული გასრულების ძალით არსებობს S-ჰომომორფიზმი β_i , რომელიც ხდის კომუტაციურს

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda_i"'] & \langle\lambda(G_i)\rangle_S \arrow[dl, "\beta_i"] \\
G_i^S &
\end{tikzcd} \qquad (i\in I)$$

დიაგრამას .

დამტკიცებული ლემის თანახმად , არსებობს S-ჰომომორფიზმი $\psi_2\colon \prod_i G_i^S \to G^S$. უშუალოდ მოწმდება , რომ ეს შემხვედრი ჰომომორფიზმებია . ■

(2) **საკითხის გადაწყვეტა** . მოვიყვანოთ მაგალითი , რომელიც გვიჩვენებს , რომ დეკარტული ნამრავლის ოპერაცია არ არის გადანაცვლებადი ტენზორული გასრულების ოპერაციასთან

აღვნიშნოთ λ-თი $\lambda\colon \overline{\Pi}_i G_i \to \overline{\Pi}_i G_i^S$.

მაშინ ტენზორული გასრულების უნივერსალური თვისების ძალით გვაქვს

S-ჰომომორფიზმი $\lambda^S\colon (\overline{\Pi}_i G_i)^S \to \overline{\Pi}_i G_i^S$, (5.4)

რომელიც ზოგად შემთხვევაში არ არის იზომორფიზმი . ასეთი მაგალითი არსებობს უკვე აბელურ ჯგუფებში .

ავიღოთ რაციონალურ რიცხვთა $R = \mathbb{Q}$ რგოლი , ხოლო G_n , $n \in \mathbb{N}$, იყოს n-ური რიგის ციკლური ჯგუფი . ვთქვათ $G_n = \langle a_n \rangle, n \in \mathbb{N}$. მაშინ

$G_n^{\mathbb{Q}} = G_n \otimes \mathbb{Q} = 0$.

მეორე მხრივ $\overline{\Pi_n} G_n$ ჯგუფში არიან უსასრულო რიგის ელემენტები და ამიტომ ჯგუფი $\left(\overline{\Pi_n} G_n\right)^{\mathbb{Q}} = \overline{\Pi} G_n \otimes \mathbb{Q}$ არანულოვანია .

(3) საკითხის გადაწყვეტა .

თეორემა 5.2. ტენზორული გასრულების ოპერაცია გადანაცვლებადია პირდაპირ ზღვრებთან , ე. ი. თუ $G_* = \lim_{\rightarrow} G_i$, მაშინ $G_*^S = \lim_{\rightarrow} G_i^S$.

დამტკიცება . აქაც ავაგოთ G_*^S და $H = \lim_{\rightarrow} G_i^S$ ჯგუფებს შორის შემხვედრი ასახვები . აღვნიშნოთ φ_i-ით $\varphi_i\colon G_i^S \to H$.

მაშინ წინადადება 2.4-ის ძალით (იხ. დიაგრამები (2.2)–(2.4)) არსებობს

R-ჰომომორფიზმი $\psi_1\colon H \to G_*^S$, რომელიც ხდის კომუტაციურს

$$
\begin{tikzcd}
G_i^S \arrow[r, "\pi_i^S"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & G_*^S \\
H \arrow[ur, "\exists\psi_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

დიაგრამას . აქ $\pi_i\colon G_i \to G_*$ გეგმილია , ხოლო $\pi_i^S\colon G_i^S \to G_*^S$

ტენზორული გასრულების შესაბამისი ჰომომორფიზმი .

ტენზორული გასრულების უნივერსალური თვისების თანახმად ყოველი i ინდექსისთვის ვაგებთ $(\psi_2)_i$ ასახვას , რომელიც კომუტაციურს ხდის

$$
\begin{tikzcd}
G_i^S \arrow[r, "\pi_i^S"] \arrow[d, "\psi_i"'] & G_*^S \\
H \arrow[ur, "(\psi_2)_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

დიაგრამას .

რადგან წინადადება 2.4-ის ძალით $\pi_i(G_i)$ ქვეჯგუფები ფარავენ G_* ჯგუფს და რადგან $(\psi_2)_i$ და $(\psi_2)_j$ ჰომომორფიზმები შეთანხმებულია საერთო ელემენტებზე , ამიტომ განსაზღვრულია R-ჰომომორფიზმი $\psi_2\colon G_* \to H$. საძიებელი შემხვედრი ჰომომორფიზმი ψ_1-თვის იქნება S-ჰომომორფიზმი $\psi_2^S\colon G_*^S \to H$. ■

(4) **საკითხის გადაწყვეტა** . ვთქვათ G^* შებრუნებული

$\mathbb{G} = \{G_i\,, (i \in I), \pi_i^j\}$ სპექტრის ზღვრული ჯგუფია . წინადადება 2.5-ის საშუალებით ავაგოთ S-ჰომომორფიზმი $\sigma\colon (G_*)^S \to \lim_{\leftarrow} G_i^S$.

ამისათვის ზღვრული ჯგუფის i-ურ კომპონენტზე გეგმილი π_i-ით აღვნიშნოთ :

$\pi_i\colon G^* \to G_i$. მაშინ ტენზორული გასრულების შესაბამისი ჰომომორფიზმია

$$\pi_i^S\colon (G_*)^S \to G_i^S.$$

ვთქვათ $\mu_i\colon \lim_{\leftarrow} G_i^S \to G_i^S$ ბუნებრივი გეგმილია . მაშინ წინადადება 2.5-ის ძალით არსებობს S-ჰომომორფიზმი $\sigma\colon (G_*)^S \to \lim_{\leftarrow} G_i^S$, რომელიც კომუტაციურს ხდის

$$
\begin{tikzcd}
(G^*)^S \arrow[r, "\exists\sigma"] \arrow[d, "\pi_i^S"'] & \lim G_i^S \arrow[dl, "\mu_i"] \\
G_i^S &
\end{tikzcd}
$$

დიაგრამას .

ვაჩვენოთ მაგალითზე , რომ ეს σ ჰომომორფიზმი ზოგად შემთხვევაში არ არის იზომორფიზმი .

მაგალითი : განვიხილოთ G_k , $k \in \mathbb{N}$, $G_k = \langle a_k \rangle$, სადაც a_k არის p^k რიგის ელემენტი , p მარტივი რიცხვია . მაშინ ცნობილია , რომ $\lim_{\leftarrow} G_k \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$, სადაც $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ მთელ p-ადიციურ რიცხვთა ჯგუფია და $\mathbb{Z}_{p^\infty}^{\mathbb{Q}}=\mathbb{Z}_{p^\infty}\bigotimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$

კონტინიუმის სიმძლავრის ვექტორული სივრცეა $\mathbb{Q}$-ზე . ამავე დროს

$\lim_{\leftarrow} G_k^{\mathbb{Q}} = \lim_{\leftarrow}(G_k \otimes \mathbb{Q}) = \lim_{\leftarrow} 0 = 0$.

ლიტერატურა

1. Мальцев А. И . Нильпотентные группы без кручения. // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1949. — Т. 13, № 3. — с. 201-212.
2. Каргаполов М.И. , Мерзляков Ю.И. , Ремесленников В.Н. . О пополнении групп //ДАНСССР. - 134. - 1960. - С. 518-520.
3. Baumslag G. on free D-groups // Comm. pure and appl. Math – 1965 . –v .18. – p . 25-30 .
4. Baumslag G. Lecture Notes on Nilpotent Groups // C.B.M.S. Regional Conf. Ser. N2. – providence . – 1971 .
5. Кузьмин Ю. В. О метабелевых **D** –группах , *УМН*, **27:1(163) (1972), 247–248**
6. Hall P. Nilpotent groups . Canad. Math. Congress. Edmonton, 1957
7. Lindon R. Groups with parametric exponents // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960 . –p. 518-533
8. Baumslag G. Free abelian X-groups . Illionois journal of mathematics . vd. 30, N2, 1986, pp. 235-245.
9. А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, “Степенныегруппы. **I:** основы теориии тензорные пополнения ,Сиб. матем. журн., **35:5 (1994), 1106–1118**
10. Л. Фукс , Бесконечные абелевы группы, Т- **1**, Мир, М., **1977**.
11. М. Атья , М. Макдональд . Введение в коммутативную алгебру.М.: Мир. **-1972**.
12. А. Г. Мясников , В. Н. Ремесленников , “Формульность множества мальцевских баз и элементарные свойства конечномерных алгебр. II”,*Сиб. мат. журн.*, **24**:2 (1983), 97–113
13. Амаглобели М.Г. Бокелавадзе Т.З. , тепенные группы III . Группы , точные при тензорном пополнении . Вестник Омского университета,N2 (2009) с. 31-42..
14. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп М.: Наука, 1974.
15. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп . 5-е изд. стер. -СПб. Лень, 2009.