ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ევგენი კუზნეცოვი

ესაკიას ორადობა სასრული ლოკალური ჰომეომორფიზმებისთვის

სამაგისტრო პროგრამა მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

ხელმძღვანელი: მამუკა ჯიბლაძე

მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, თსუ ა.რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის მათემატიკური ლოგიკის განყოფილების გამგე

თბილისი 2014

ანოტაცია

საკითხები, რომლებიც სამაგისტრო ნაშრომში შეისწავლება, უკავშირდება თემატიკას, რომელზეც მუშაობდა დიტო პატარაია. სამწუხაროდ, დიტოს უდროო ტრაგიკული სიკვდილის გამო მისი ბოლო უმნიშვნელოვანესი შედეგები კვლავაც გამოუქვეყნებელი რჩება. მოცემული ნაშრომი მიზნად ისახავს დიტოს მიგნებების ერთ-ერთი ასპექტის გააზრებას.

დიტოს ეკუთვნის კონსტრუქცია, რომელიც პასუხს სცემს ენდრიუ პიტსის მიერ ოცდაათზე მეტი წლის წინ დასმულ კითხვას: წარმოდგება თუ არა ნებისმიერი ჰეიტინგის ალგებრა რომელიმე ელემენტარული ტოპოსის ობიექტის ყველა ქვეობიექტთა მესერის სახით. ჩვენი მიზანია წარმოვადგინოთ დიტოს კონსტრუქციის გამარტივებული ვარიანტი, რომელიც ჩვენი აზრით მხოლოდ შეზღუდულ პირობებში მუშაობს, მაგრამ დაგვეხმარება ზოგადი კონსტრუქციის უკეთ გააზრებაში.

კონსტრუქციის ჩვენი ვარიანტის საკვანძო იდეაა ლოკალური ჰომეომორფიზმის ანალოგის მოფიქრება ესაკიას სივრცეებისთვის. სახელდობრ, ჩვენ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ ყველა ლოკალური ჰომეომორფიზმი მოცემულ X სივრცეზე აიგება X-ის რამდენიმე ეგზემპლიარის ღია სიმრავლეების გასწვრივ შეწებების ღია ქვესიმრავლედ. ესაკიას ორადობის მიხედვით ამას შეესაბამება მოცემული H ჰეიტინგის ალგებრის რამდენიმე ეგზემპლიარის ნამრავლის ქვეალგებრის ფაქტორს. ამრიგად ალგებრულად ეს ნიშნავს H-ალგებრების მრავალნაირობაში თავად H-ის მიერ წარმოქმნილი ქვემრავალნაირობის აღწერას.

ჩვენი მიზანია ასეთი მრავალნაირობის აღწერა სასრული H-ისთვის, როგორც ალგებრული იგივეობების, ისე ორადული დალაგებული სიმრავლის ტერმინებში. ჩვენ ვაპირებთ გავარკვიოთ, როდის წარმოადგენს შესაბამისი კატეგორიის სასრული ობიექტების ქვეკატეგორია ტოპოსს, ხოლო უსასრულო შემთხვევისათვის ავაგოთ მაგალითი, როდესაც ტოპოსი არ მიიღება.

გარდა ამისა, ვაპირებთ აღნიშნული მრავალნაირობების თავისებურებების გამოკვლევას; კერძოდ, გვინდა დავადგინოთ, როგორი „ტოპოსის მაგვარი“ თვისებები გააჩნია ამ მრავალნაირობის ორადულ კატეგორიას.

აღვნიშნოთ, რომ ზემოთ აღწერილი კონსტრუქცია შეიძლება ჩატარდეს სრულიად ნებისმიერი უნივერსალური ალგებრებისთვის. ჩვენ ვაპირებთ რამდენიმე ასეთი შემთხვევის აღწერას უფრო ზოგადი მრავალნაირობებისთვის.

შინაარსი

შესავალი

ამოცანა რომლის ამოხსნასაც ემსახურება სამაგისტრო ნაშრომი უკავშირდება ე.წ პიტსის პრობლემას. ეს უკანასკნელი გადაწყვეტილიქნა დიტო პატარაიას მიერ, თუმცა სამწუხაროდ დიტოს ნაშრომი ჯერაც არ არის გამოქვეყნებული და არც ბოლომდეა გაგებული.

ჩვენ მიზნად დავისახეთ ვეძებოთ პიტსის პრობლემის ამოხსნის გამარტივებული გზები. პირველ რიგში უნდა ავღნიშნოთ, რომ ჩვენთვის ამთავითვე ცნობილია, რომ ჩვენს მიერ არჩეული მეთოდით პიტსის პრობლემის სრულ ამოხსნას ვერ მივაღწევთ, რასაც ქვემოთ დაწვრილებით შევეხებით. სხვანაირად რომ ვთქვათ ჩვენ ავიჩიეთ პიტსის პრობლემის გამარტივებული ვარიანტი რომელსაც გაცილებით უფრო მარტივი ამოხსნა აქვს დიტოს ამოხსნასთან შედარებით. ამას ვაკეთებთ იმ იმედით რომ ეს გამარტივებული ვარიანტი უკეთესად დაგვანახებს თუ რა უნდა გავაკეთოთ ზოგად შემთხვევაში.

პიტსმა დასვა შემდეგი კითხვა. ცნობილია, რომ ნებისმიერ ელემენტარულ ტოპოსში ნებისმიერი ობიექტის ქვეობიექტები ქმნიან ჰეიტინგის ალგებრას; მიიღება თუ არა ასეთნაირად ნებისმიერი ჰეიტინგის ალგებრა?

როგორც ვთქვით დიტო პატარაიამ ამ კითხვაზე გასცა პასუხი. დიტო ცხადად აგებს ყოველი მოცემული H ჰეიტნგის ალგებრისათვის ისეთ ტოპოსს $\mathcal{E}(H)$, რომელშიც ტერმინალური ობიექტის ქვეობიექტების ჰეიტინგის ალგებრა იზომორფულია H-ის. დიტოს მიდგომა ემყარება მის მიერ შემოღებული ე.წ. მაღალი რიგის ცილინდრული ალგებრის ცნებას. მისი დამტკიცების ყველა ნაბიჯი სრულად სამწუხაროდ ჯერაც არ გვაქვს გააზრებული.

ჩვენი მეთოდი გვაძლევს სხვა, უფრო მარტივად მიღებულ კატეგორიას $\mathcal{F}(H)$. რომლის ტერმინალის ქვეობიექტები აგრეთვე ქმნიან H-ის იზომორფულ ჰეიტინგის ალგებრას, მაგრამ ზოგად შემთხვევაში ეს კატეგორია არ არის ტოპოსი. მიუხედავად ამისა ჩვენ ეს კონსტრუქცია საინტერესოდ მიგვაჩნია ორი მიზეზის გამო. პირველი ცალკეული H-ებისთვის ჩვენ ვახერხებთ $\mathcal{F}(H)$-დან სასურველი თვისების მქონე ტოპოსის აგებას, თან ისეთის რომელიც ამავე H-თვის არსებითად უფრო მარტივია ვიდრე დიტოს კონსტრუქციით მიღებული ტოპოსი. მეორე, ზოგად შემთხვევაშიც

როდესაც ჩვენ არ ვიცით თუ როგორ მივიღოთ $\mathcal{F}(H)$-დან ტოპოსი, თავად $\mathcal{F}(H)$ გამოირჩევა რიგი კატეგორიული თვისებებით რომელიც მას აახლოებს ტოპოსებთან. ეს გვაძლევს იმედს რომ ზოგად შემთხვევაშიც შესაძლებელი იქნება $\mathcal{F}(H)$-დან საჭირო ტოპოსის მიღება.

მეთოდი რომელსაც ჩვენ ვიყენებთ $\mathcal{F}(H)$ კატეგორიის ასაგებად დამყარებულია ესაკიას ორადობაზე ჰეიტინგის ალგებრებსა და ე.წ. ესაკიას სივრცეებს შორის. ეს ორადობა საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ ტოპოლოგიური მეთოდები ჰეიტინგის ალგებრების აგებისათვის.

ტოპოლოგიური სივრცეებისთვის მათი შესაბამისი ტოპოსები კარგად არის ცნობილი: ნებისმიერ X ტოპოლოგიურ სივრცეს შეესაბამება ტოპოსი $\mathrm{Sh}(X)$, რომლის ობიექტებია სიმრავლეთა კონები X-ზე ხოლო ტერმინალური ობიექტის ქვეობიექტების ჰეიტინგის ალგებრა იზომორფულია X-ის ღია ქვესიმრავლეთა ჰეიტინგის ალგებრის $\mathrm{Op}(X)$. ჩვენთვის საკვანძო ფაქტი არის ის რომ სიმრავლეთა კონები X-ზე ურთიერთცალსახად შეესაბამება ლოკალურ ჰომეომორფიზმებს X-ზე. ჩვენი მიდგომა ემყარება ამ გარემოებას შემდეგნაირად: ესაკიას სივრცეებს ჩვენ განვიხილავთ როგორც ტოპოლოგიური სივრცეების გარკვეულ გამზოგადებას. ამ განზოგადებიოს საფუძველზე შემოვიტანთ ესაკიას სივრცეების ლოკალური ჰომეომორფიზმის ცნებას, რომელსაც ექნება ტოპოლოგიური სივრცეების ლოკალური ჰომეომორფიზმის ანალოგიური თვისებები. რისი წყალობითაც ლოკალური ჰომეომორფიზმის კატეგორია, ფიქსირებულ $\mathfrak{X}$ ესაკიას სივრცეზე, თუმცა საზოგადოდ არ არის ტოპოსი მაგრამ გამოირჩევა რამდენიმე თვისებით რომლებიც მას ტოპოსს ამსგავსებს.

შემდეგ ჩვენ ვიყენებთ ესაკიას ორადობას იმისათვის რომ გადავთარგმნოთ ესაკიას სივრცეების ლოკალური ჰომეომორფიზმის ცნება ორადული, ჰეიტინგის ალგებრების ჰომომორფიზმების ტერმინებში. საკვანძო გარემოება აქ არის ის, რომ ნებისმიერი ლოკალური ჰომეომორფიზმების წარმოქმნას ღია ქვესიმრავლეების შეწებებით ორადულად შეესაბამება ბირკჰოფის კლასიკური კონსტრუქცია, რომლის მიხედვითაც ალგებრების კლასით წარმოქმნილი მრავალნაირობა მიიღება ნამრავლების ქვეალგებრების და ჰომომორფული ანასახების მიერთებით.

ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს $\mathfrak{X}$ ესაკიას სივრცეზე ლოკალური ჰომეომორფიზმების კატეგორიის ორადული კატეგორია აღვწეროთ როგორც $\mathfrak{X}$ -ის ორადული H ჰეიტინგის ალგებრის მიერ წარმოქმნილი ქვემრავალნაირობა H -ალგებრების კატეგორიაში. მიღებულ მრავალნაირობას ჩვენ ვუწოდებთ ეტალური H -ალგებრების მრავალნაირობას. კერძო შემთხვევაში როდესაც H სასრულია ჩვენ ვადგენთ რომ ეს მრავალნაირობა წარმოიქმნება ერთადერთი იგივეობით. ზოგად შემთხვევაში ჩვენ ვადგენთ ეტალური H -ალგებრების მრავალნაირობის რამდენიმე დამახასიათებელ თვისებას რომლებიც შეესაბამება მისი ორადული კატეგორიის ტოპოსთან მსგავსებას. კერძოდ ჩვენ დავამტკიცებთ რომ პირდაპირი კოზღვრები ეტალური H -ალგებრების კატეგორიაში ემთხვევა შესაბამისი დისტრიბუციული მესრების კოზღვრებს.

როდესაც H სასრული ჰეიტინგის ალგებრაა მისი ორადული ესაკიას სივრცე $\mathfrak{X}$ წარმოადგენს სასრულ დალაგებულ სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში სასრულ ეტალურ H -ალგებრებს შეესაბამება ლოკალური ჰომეომორფიზმები $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ სასრული $\mathfrak{Y}$ -ით. ამ კერძო შემთხვევაში (და მხოლოდ ამ შემთხვევაში) ჩვენ ვღებულობთ ტოპოსს. სახელდობრ ეს არის ფუნქტორების კატეგორია $\mathfrak{X}$ დალაგებული სიმრავლიდან სასრულ სიმრავლეებში.

1. ძირითადი ცნებები და განსაზღვრებები. დამხმარე დებულებები.

1.1. ჰეიტინგის ალგებრები, ესაკიას სივრცეები, ესაკიას ორადობა, p - მორფიზმები.

1.1.1 დისტრიბუციული მესერები .

დავიყოთ ძირითადი ცნებების განმარტებით. $(A, \leq)$ სიმრავლეს დალაგების მიმართებით ვუწოდოთ *მესერი* თუ ნებისმიერ ორწერტილიან ქვესიმრავლეს A-დან გააჩნია უნცირესი ზედა საზღვარი და უდიდესი ქვედა საზღვარი. მესრისათვის $(A, \leq)$ და ელემენტებისათვი $a, b \in A$ შემოვიტანოთ აღნიშვნები $a \vee b :\coloneqq sup(a, b)$ და $a \wedge b :\coloneqq inf(a, b)$. ჩავთვალოთ რომ ყოველი მესერი შემოსაზღვრულია უმცირესი ელემენტით ***0*** და უდიდესი ელემანტით ***1***. შემდეგი დებულება გვიჩვენებს რომ მესერი შეიძლება განიმარტოს აქსიომატურდაც (იხ.მაგ. : [BD] Theorem 1,გვ.44 და [BS] გვ.8)

დებულება.1.1.1 სტრუქტურა $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$, სადაც $A \neq \emptyset$, $\vee$ და $\wedge$ არიან ბინარული ოპერაციები ხოლო 0 და 1 არიან A-ს ელემენტები, არის შემოსაზღვრული მესერი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ნებისმიერი ელემენტებისათვის $a, b, c \in A$ სრულდება შემდეგი ტოლობები:

1. $a \vee a = a,$ $\qquad a \wedge a = a,$
2. $a \vee b = b \vee a,$ $\qquad a \wedge b = b \wedge a,$
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,$ $\qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c,$
4. $a \vee 0 = a,$ $\qquad a \wedge 1 = a$
5. $a \vee (b \wedge c) = a,$ $\qquad a \wedge (b \vee c) = a.$

დამტკიცება. იმის შემოწმება რომ ყველა მესერი აყმაყოფილებს ამ ტოლობებს 1-5 მხოლოდ და მხოლოდ რუტინას წარმოადგენს. დავუშვათ $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ აყმაყოფილებს ტოლობებს 1-5. დავწერთ რომ $a \leq b$ თუ $a \vee b = b$ ან რაც იგივეა $a \wedge b = a$. იმის ჩვენება რომ $(A, \leq)$ მესერია უდიდესი და უმცირესი ელემენტებით 0 და 1, ასევე მხოლოდ რუტინაა. შემდეგში $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ აღნიშნავს შემოსაზღვრულ მესერს. ვიტყვით რომ

მესერი სრულია თუ ყოველი ქვესიმრავლისათვის $X \subseteq A$ არსებობს $\bigvee X = \sup(X)$ $\bigwedge X = \inf(X)$.

განსაზღვრება. შემოსაზღვრულ მესერს $(A, \vee, \wedge, 0,1)$ დავარქვათ დისტრიბუციული თუ მასში სრულდება დისტრიბუციულობის შემდეგი კანონი:

- $\boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c})$,
- $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c})$

განსაზღვრება. დისტრიბუციულო მესერს $(A, \vee, \wedge, 0,1)$ დავარქვათ *ჰეიტინგის ალგებრა* თუ ყოველი $a, b \in A$ -თვის არსებობს ელემენტი $a \to b$ ისეთი რომ ყოველი $c \in A$-თვის გვაქვს :

$$c \leq a \to b \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც } a \wedge c \leq b.$$

" $\to$ " -ს ვუწოდებთ ჰეიტინგის იმპლიკაციას ან უბრალოდ იმპლიკაციას. ყოველი a ელემენტისათვის ჰეიტინგის ალგებრიდან $\neg a := a \to 0$.

მესრების შემთხვევის მსგავსად ჰეიტინგის ალგებრა შეგვიძლია განვსაზღვროთ აქსიომატური გზით (იხ.[SP] Lemma 1.10)

თეორემა.1.1.1 *მესერი* $\mathcal{U} = (A, \vee, \wedge, 0,1)$ *არის ჰეიტინგის ალგებრა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც არსებობს ოპერაცია* " $\to$ " *ისეთი რომ ნებისმიერი* $a, b, c \in A$ *რომ :*

1. $\mathrm{a} \to \mathrm{a} = 1$,
2. $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$,
3. $b \wedge (a \to b) = b$,
4. $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

დამტკიცება. დავუშვათ რომ სრულდება პირობები 1-4. ვთქვათ $c \leq \mathrm{a} \to \mathrm{b}$ *. მაშინ (2)-ის თანახმად* $c \wedge a \leq (a \to b) \wedge a = a \wedge b \leq b$. *მეორესმხრივ შევნიშნოთ რომ ნებისმიერი* $a \in A$ *ასახვა* $(a \to \cdot)$ *მონოტონურია, ე.ი. თუ* $b_1 \leq b_2$ *მაშინ* $(a \to b_1) \leq (a \to b_2)$. *მართლაც, რადგან* $b_1 \leq b_2$ *გვექნება* $b_1 \wedge b_2 = b_1$. *ამასთანავე (4)-ის თანახმად* $(a \to b_1) \wedge (a \to b_2) = a \to (b_1 \wedge b_2) = a \to b_2$. *ამგვარად მაშინ* $(a \to b_1) \leq (a \to b_2)$. *ახლა დავუშვათ* $c \wedge a \leq b$. *(3)-ის თანახმად* $c = c \wedge (a \to c) \leq 1 \wedge (a \to c)$. *(1)-ის და (4)-ის*

თანახმად $1 \wedge (a \to c) = (a \to a) \wedge (a \to c) = a \to (a \wedge c)$. *და ბოლოს, რადგანაც* $(a \to \cdot)$ *მონოტონურია, ვღებულობთ რომ* $a \to (a \wedge c) \leq a \to b$ *და მაშასადამე* $c \leq a \to b$.
იმის ჩვენება რომ ჰეიტინგის ალგებრის განსაზღვრებაში მოცემული " $\to$ " *აკმაყოფილებს 1-4 პირობებს მხოლოდ რუტინას წარმოადგენს და ამის დამტკიცებას გამოვტოვებთ.*

1.1.2 დალაგებულ-ტოპოლოგიური ორადობა

აქ მოვიყვანთ ე.წ პრისტლი-ესაკიას ორადობას ჰეიტინგის ალგებრებსა და დალაგებულ ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის. უპირველესყოვლისა კი მოვიყვანოთ ძირითადი განსაზღვრებები ზოგადი ტოპოლოგიიდან.

განსაზღვრება. წყვილს $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O})$ ვუწოდოთ ტოპოლოგიური სივრცე თუ $X \neq \emptyset$ და $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ არის X-ის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლის ქვეოჯახი ისეთი რომ

1. $X, \emptyset \in \mathcal{O}$,
2. თუ $U, V \epsilon \mathcal{O}$ მაშინ $U \cap V \in \mathcal{O}$,
3. თუ $U_i \in \mathcal{O}$ ყოველი $i \epsilon I$ მაშინ $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$-ს ელემენტებს ეწოდებათ ღია სიმრავლეები მათ დამატებებს კი ჩაკეტილი.

ვთქვათ $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O})$ ტოპოლოგიური სივრცეა.

- $\mathcal{X}$ -ს ეწოდება ჰაუსდორფის თუ ყოველი $x, y \in X$, $x \neq y$ მოიძებნება $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ისეთი რომ $x \in U_1, y \in U_2$ და $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
- $\mathcal{X}$ -ს ეწოდება კომპაქტი თუ მისი ნებისმიერი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სარული ქვედაფარვა.
- $\mathcal{X}$-ს ეწოდება 0-განზომილებიანი თუ ყოველი $U \in \mathcal{O}$ წარმოდგება ღია-ჩაკეტილი სიმრავლეეების გაერთიანების სახით.

განსაზღვრება. ტოპოლოგიურ სივრცეს $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O})$-ს ეწოდება *სტოუნის სივრცე* თუ ის კომპაქტურია ჰაუსდორფისაა და 0-განზომილებიანი.

განსაზღვრება. ვთქვათ $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O}, R)$ ისეთია რომ $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O})$ სტოუნის სივრცეა და R ნაწილობრივი დალაგების მიმართებაა X-ზე.

1. R აყმაყოფილებს პრისტლის განცალების აქსიომას თუ ყოველი $x, y \in X$: თუ $\neg(xRy)$ მაშინ არსებობს ღია-ჩაკეტილი R -ის მიმართ ზედა კონუსი U ისეთი რომ $x \in U$ და $y \notin U$.
2. R-ს ეწოდება წერტილოვნად-ჩაკეტილი თუ $R(x)$ ჩაკეტილია ყოველი $x \in X$-თვის.
3. R-ს ეწოდება ღია-ჩაკეტილი თუ $R^{-1}(U)$ ღია-ჩაკეტილი სიმრავლეა ყოველი ღია-ჩაკეტილი U სიმრავლისათვის.
4. $\mathcal{X} = (X, \mathcal{O}, R)$ -ს ეწოდება პრისტლის სივრცე თუ ის სტოუნის სივრცეა და აყმაყოფილებს პრისტლის გამცალების აქსიომას.
5. $\mathcal{X}$ -ს ეწოდეა ესაკიას სივრცე თუ ის სტოუნის სივრცეა და R წერტილოვნად ჩაკეტილი და ღია-ჩაკეტილი მიმართებაა.

თეორემა.1.1.2 დისტრიბუციული მესრების და მათი ჰომომორფიზმების კატეგორიის ორადული კატეგორია ექვივალენტურია პრისტლის სივრცეებისა და მონოტონური უწყვეტი ასახვების კატეგორიის (იხ, [DP]).

განსაზღვრება. მონოტონურ ასახვას $f: (Y, \leq) \to (X, \leq)$ დალაგებულ სიმრავლეებს შორის ეწოდება *p*-მორფიზმი თუ ნებისმიერი $y \in Y$-თვის და ნებისმიერი $f(y) \leq x \in X$-თვის მოიძებნება $y \leq y'$ ისეთი რომ $f(y') = x$.

განსაზღვრება . უწყვეტ *p*-მორფიზმს ესაკიას სივრცეებს შორის ეწოდება ესაკიას მორფიზმი.

თეორემა 1.1.3 ჰეიტინგის ალგებრებისა და მათი ჰომომორფიზმების კატეგორიის ორადული კატეგორია ექვივალენტურია ესაკიას სივრცეებისა და ესაკიას მორფიზმების კატეგორიის (იხ. [ES]).

1.2. ელემენტარული ტოპოსები. კონები. ლოკალური ჰომეომორფიზმები. შესაბამისობა კონებსა და ლოკალურ ჰომეომორფიზმებს შორის.

შემდეგისათვის დაგვჭირდება რიგი ცნებებისა კატეგორიათა თეორიიდან. ვთქვათ კატეგორიაში $\mathcal{C}$ არსებოს სასრული ნამრავლები. დაფიქსირებული ობიექტისათვის A შეგვიძლია დავწეროთ შესაბამისობა $B \mapsto B \times A$ რომელიც სინამდვილეშ წარმოადგენს ფუნქტორს. ვიტყვით რომ A ექსპონენცირებადია თუ ამ ფუნქტორს აქვს მარჯვენა შეუღლებული $(-)^A$. კატეგორიას დავუძახოთ *საკუთრივ დეკარტულად* ჩაკეტილი თუ მასში არსებობს სასრული ნამრავლები და გამაწონასწორებლოები და ყველა ობიექტი ექსპონენცირებადია.

ახლა დავუშვათ კატეგორიაში $\mathcal{C}$ არსებობს ტერმინალური ობიექტი, რომელსაც ავღნიღნავთ 1-ით. ობიექტს Ω ეწოდება ქვეობიექტების კლასიფიკატორი თუ არსებობს მორფიზმი $\top: 1 \to \Omega$ შემდეგი თვისებებით:

ყოველი მონომორფიზმისათვის $j: U \to X$ არსებობს ერთადერთი მორფიზმი $\chi_j: X \to \Omega$ ისეთი რომ შემდეგი კომუტატური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ X \arrow[r, "\chi_j"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

არის პულბეკის დიაგრამა.

განსაზღვრება. ტოპოსი არის საკუთრივ დეკარტულად ჩაკეტილი კატეგორია ქვეობიექტთა კლასიფიკატორით.

ახლა ვთქვათ $\mathcal{X}$ ტოპოლოგიური სივრცეა, $\mathcal{O}(\mathcal{X})$-ით ავღნიშნოთ მისი ღია სიმრავლეთა მესერი. შევხედოთ ამ ტოპოლოგიურ სივრცეს როგორც შემდეგნაირ კატეგორიას, ამ კატეგორიის ობიექტები იყოს ღია ქვესიმრავლეები $\mathcal{X}$ ხოლო ისარი U_1 ობიექტიდან U_2 ობიექტში ასებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $U_1 \subseteq U_2$.

განსაზღვრება. ფუნქტორს $F: \mathcal{X} \longrightarrow Set$ ეწოდება წინარეკონა $\mathcal{X}$-ზე.

ვიტყვით რომ წინარეკონა არის კონა თუ U ღია სიმრავლისრაიმე ღია დაფარვისათვის $(U_i|i \in I)$ და ნებისმიერი ოჯახისათვის $(s_i|i \in I)$ ელემენტების $F(U_i)$-დან რომლებიც შეთანხმებულია იმ აზრით რომ ყოველი წყვილისათვის (i, j), s_i-ს და s_j-ს შეზღუდვა $F(U_i \cap U_j)$-ზე ტოლია,

არსებობს ერთადერთი $s \in F(U)$ რომლის შეზღუდვა ყოველ U_i-ზე უდრის შესაბამის s_i-ს. $\mathcal{X}$-ზე კონების კატეგორიის აღსანიშნავად ვიყენებთ აღნიშნას $Sh(\mathcal{X})$.

რადგანაც ჩვენი შესწავლის ობიექტს წარმოადგენს ლოკალური ჰომეომორფიზმები საჭიროა მისი ცნების შემოტანა.

განსაზღვრება. უწყვეტ ასახვას $f: Y \to X$ ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის ეწოდება ღია თუ ყოველი U ღია სიმრავლისათვის Y-დან $f(U)$ ღიაა X-ში.

განსაზღვრება. უწყვეტ ასახვას $f: Y \to X$ ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის ეწოდება ლოკალური ჰომეომორფიზმი თუ ყოველი წერტილისათვის $y \in Y$ არსებობს ღია მიდამო $y \in U \subseteq Y$ ისეთი რომ $f|_U: U \to f(U)$ ჰომეომორფიზმია U-სა და $f(U)$-ს შორის.

ტოპოლოგიური სივრცე X-თვის LH/X -ით ავღნიშნოთ X -ზე ლოკალური ჰომეომორფიზმების კატეგორია. მისი ობიექტებია ყველანაირი ლოკალური ჰომეომორფიზმები $f: Y \to X$. მორფიზმი ობიექტიდან $f: Y \to X$ ობიექტში $f': Y' \to X$ არის ისეთი უწყვეტი ასახვა $g: Y \to Y'$ რომ $f'g = f$.

აგრეთვე განვიხილოთ ანალოგიური კატეგორია Op/X . ის განისაზღვრება ზუსტად ისევე როგორც LH/X , იმ განსხვავებით რომ ლოკალური ჰომეომორფიზმების მაგივრად ვიხილავთ ღია ასახვებს.

ლიტერატურაში არსებობს რამდენიმე მნიშვნელოვანი თეორმა ლოკალურ ჰომეომორფიზმებთან დაკავშირებით. რადგანაც ეს თეორემები წარმოადგენენ მნიშვნელობას ჩვენთვისაც მოვიყვანოთ ისინი მაგრამ სხადია დაუმტკიცებლად თუმცა წყაროს მითითებით.

დებულება 1.2.1. *ყოველი X ტოპოლოგიური სივრცისათვის X-ზე კონების კატეგორია ექვივალენტურია X-ზე ლოკალური ჰომეომორფიზმების კატეგორიის.* $\mathrm{Sh}(X) \simeq \mathrm{LH}/X$ *(იხ.[E] C1.3 Theorem 1.3.11).*

და არანაკლებ მნიშნელოვანი დებულება

დებულება.1.2.2 *ყოველი X ტოპოლოგიური სივრცისათვის X-ზე ლოკალური ჰომეომორფიზმების კატეგორია* LH/X *არის ტოპოსი (იხ.[E] A4.2.4(e)).*

ლემა. *ვთქვათ* $i : Y \to Z$ *და* $\pi : Z \to Y$ *ისეთი უწყვეტი ასახვებია რომ* $\pi \circ i = 1_Y$ *მაშინ* i *არის ღია ასახვა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც* $i(Y)$ *ღია ქვესიმრავლეა* Z *-ში.*

დამტკიცება. ერთი მხარე ცხადია.

დავამტკიცოთ მეორე. ვთქვათ U ღია სიმრავლეა Y -ში. ვინაიდან $\pi \circ i = 1_Y$, $i(U) = i(Y) \cap \pi^{-1}(U)$ *. რადგან* $i(Y)$ *და* $\pi^{-1}(U)$ *ღია ქვესიმრავლეებია ამიტომ* $i(U)$ *-ც ღია ქვესიმრავლეა.*

დებულება 1.2.3. $f : Y \to X$ ლოკალური ჰომეომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც f ღიაა და დიაგონალი $\Delta_f : Y \to Y \times_X Y$ აგრეთვე ღიაა.

დამტკიცება. ვთქვათ $f : Y \to X$ ლოკალური ჰომეომორფიზმია ცხადია f ღიაა. იმისათვის რომ ვაჩვენოთ რომ $\Delta_f : Y \to Y \times_X Y$ აგრეთვე ღიაა ლემის ძალით საკმარისია ვაჩვენოთ რომ $\Delta_f(Y)$ ღია ქვესიმრავლეა $Y \times_X Y$ -ში. $Y \times_X Y$ -ში ტოპოლოგიის ბაზა მოიცემა $(Y \times_X Y) \cap U_1 \times U_2$ სახის სიმრავლეებით სადაც U_1, U_2 ნებისმიერი ღია სიმრავლეებია Y -დან. ამიტომ საკმარისია ყოველი $y \in Y$ -სათვის მოვძებნოთ ისეთი U_y რომ $(y,y) \in (Y \times_X Y) \cap U_y \times U_y \subseteq \Delta_f(Y)$. რადგან f ლოკალური ჰომეომორფიზმია გვაქვს ისეთი U_y რომ $y \in U_y$ და $f|_{U_y}$ არის ჰომეომორფიზმი U_y -დან $f(U_y)$ -ზე.მაშინ ცხადია რომ $(y,y) \in (Y \times_X Y) \cap U_y \times U_y$. ვთქვათ $(y_1, y_2) \in (Y \times_X Y) \cap U_y \times U_y$ ეს ნიშნავს რომ $f(y_1) = f(y_2)$ და $y_1, y_2 \in U_y$. რადგან $f|_{U_y}$ ინაქციაა აქედან $y_1 = y_2$ რაც ნიშნავს რომ $(y_1, y_2) \in \Delta_f(Y)$. მივიღეთ რომ $(Y \times_X Y) \cap U_y \times U_y \subseteq \Delta_f(Y)$.

პირიქით ვთქვათ f და Δ_f ღიაა ასახვებია. მაშინ კერძოდ ყოველი $y \in Y$ -თვის მოიძებნება $Y \times_X Y$ -ის საბაზო ღია $(Y \times_X Y) \cap U_1 \times U_2$ ისეთი რომ $(y,y) \in (Y \times_X Y) \cap U_1 \times U_2 \subseteq \Delta_f(Y)$. მაშინ $y \in U_1$ და $y \in U_2$ ესეიგი $U = U_1 \cap U_2$ y -ს ღია მიდამოა. თანაც $(Y \times_X Y) \cap U \times U \subseteq \Delta_f(Y)$ რაც ნიშნავს რომ თუ $(y_1, y_2) \in (Y \times_X Y) \cap U \times U$ მაშინ $y_1 = y_2$. ეს კი ნიშნავს რომ თუ $f(y_1) = f(y_2)$ $y_1, y_2 \in U$ მაშინ $y_1 = y_2$. ამრიგად $f|_U$ ინექციაა. რადგან f ღია ასახვაა, $f|_U$ არის ჰომეომორფიზმი თავის ანასახზე.

თეორემა 1.2.1. LH/ X *არის ის უმცირესი სრული ქვეკატეგორია* Op/ X *-ში რომელიც შეიცავს ობიექტს* $1_X : X \to X$ *(*X *-ის იგივურ ასახვას) და ჩაკეტილია კონამრავლების, ფაქტორობიექტების და ქვეობიექტების მიმართ.*

შენიშვნა. კონამრავლები Op/ X -ში ემთხვევა კონამრავლებს ტოპოლოგიური სივრცეების კატეგორიაში და მოიცემა თანაუკვეთი გაერთიანების სახით. ფაქტორობიექტები Op/ X -ში აღიწერება შემდეგნაირად: $f : Y \to X$ ობიექტის ფაქტორობიექტი არის $f' : Y' \to X$ და სურექციული ღია ასახვა $q : Y \twoheadrightarrow Y'$ ისეთი რომ $q \circ f' = f$. $f : Y \to X$ -ის ქვეობიექტი არის Y -ის ნებისმიერი U ღია ქვესიმრავლე აღჭურვილი ასახვით $f \circ i$ სადაც i არის U -ს ჩადგმა Y -ში.

თეორემის დამტკიცება. ვაჩვენოთ რომ LH/ X არის Op/ X -ის სრული ქვეკატეგორია. სხვანაირად რომ ვთქვათ თუ $f : Y \to X$, $f' : Y' \to X$ ლოკალური ჰომეომორფიზმებია ხოლო $g : Y \to Y'$ ისეთი უწყვეტი ასახვაა რომ $f' g = f$, მაშინ g -ც ლოკალური ჰომეომორფიზმია. მართლაც კერძოდ აქედან გამოვა რომ g ღია ასახვაა. ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი $y \in Y$, ვინაიდან f ლოკალური ჰომეომორფიზმია მოიძებნება y -ის ისეთი მიდამო U , რომ $f|_U$ არის ჰომეომორფიზმი U -დან $f(U)$ -ზე. ვინაიდან f' ლოკალური ჰომეომორფიზმია მოიძებნება $g(y)$ -ის მიდამო U' ისეთი რომ $f'|_{U'}$ არის ჰომეომორფიზმი U' -დან $f'(U')$ -ზე. განვიხილოთ X -ს ღია ქვესიმრავლე $V = f(U) \cap f'(U')$, მაშინ f იწვევს ჰომეომორფიზმს $U \cap f^{-1}(V)$ -დან V -ზე ხოლო f' $U' \cap (f')^{-1}(V)$ -დან V -ზე. ნებისმიერი წერტილისათვის $z \in U \cap f^{-1}(V)$ $f'(g(z)) = f(z) \in V$ ამიტომ განსაზღვრულია $(f')^{-1}(f(z)) = (f')^{-1} f'(g(z)) = g(z)$ მივიღეთ რომ $g|_{U \cap f^{-1}(V)}$ არის ჰომეომორფიზმი $U \cap f^{-1}(V)$ -დან თავის ანასახზე. მაშასადამე g -ც ლოკალური ჰომეომორფიზმი.

ახლა ვაჩვენოთ რომ LH/ X ჩაკეტილია კონამრავლების, ფაქტორობიექტების და ქვეობიექტების მიმართ. ცხადია რომ თუ $f_i : Y_i \to X$ $i \in I$ არიან ლოკალური ჰომეომორფიზმები მაშინ ინდუცირებული ასახვა $f : \coprod_{i \in I} Y_i \to X$ აგრეთვე ლოკალური ჰომეომორფიზმია. აგრეთვე ცხადია რომ თუ $f : Y \to X$ ლოკალური ჰომეომორფიზმია

მაშინ Y -ის ნებისმიერი ღია U ქვესიმრავლისთვის $f|_U$ ასევე ლოკალური ჰომეომორფიზმია. ახლა დავუშვათ რომ გვაქვს ლოკალური ჰომეომორფიზმი $f: Y \to X$ ღია სურექცია $q: Y \twoheadrightarrow Y'$ და ასახვა $f': Y' \to X$ ისეთი რომ $f'q = f$, ვაჩვენოთ რომ f' ლოკალური ჰომეომორფიზმია. მართლაც განვიხილოთ ნებისმიერი წერტილი $y' \in Y'$ რადგან q სურექციაა მოიძებნება ისეთი $y \in Y$ რომ $q(y) = y'$. რადგან f ლოკალური ჰომეომორფიზმია მოვძებნით y -ის მიდამო U -ს ისეთს რომ $f|_U$ არის ჰომეომორფიზმი $f(U)$ -ზე. ვინაიდან q ღიაა $q(U)$ არის y'-ის ღია მიდამო. თანაც $f'q(U) = f(U)$. გვაქვს ჰომეომორფიზმი $f^{-1}: f(U) \to U$ ვაჩვენოთ რომ $q \circ f^{-1}: f(U) \to q(U)$ არის $f'|_{q(U)}$ -ს შებრუნებული ჰომეომორფიზმი. მართლაც $f'|_{q(U)} \circ q \circ f^{-1}(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$ ნებისმიერი $x \in f(U)$. $q \circ f^{-1} \circ f'(z') = z'$ ნებისმიერი $z' \in q(U)$ მართლაც მოვძებნით $z \in U$ ისეთს რომ $q(z) = z'$ მაშინ $q \circ f^{-1} \circ f'(z') = q \circ f^{-1} \circ f' \circ q(z) = q \circ f^{-1} \circ f(z) = q(z) = z'$.

ბოლოს ვაჩვენოთ რომ LH/ X უმცირესია ასეთი თვისებით. ცნობილია (იხ. [FS], გვ. 347, Theorem 4.13) რომ ნებისმიერი ლოკალური ჰომეომორფიზმისთვის $f: Y \to X$ მოიძებნება X -ის ღია სიმრავლეთა ოჯახი U_i $i \in I$ და $U_{ij} \subseteq U_i \cap U_j$ ისეთი რომ Y ჰომეომორფულია $\coprod_{i \in I} U_i$ სივრცის ფაქტორსივრცისა $(x,i) \sim (x,j)$ გაიგივების მიმართ $(x,i) \in U_i$, $(x,j) \in U_j$ თითოეული $x \in U_{ij}$ -თვის. კერძოდ გვაქვს ღია სურექციული ასახვა $q: \coprod_{i \in I} U_i \twoheadrightarrow Y$. მეორეს მხრივ გვაქვს ჩადგმა $a: \coprod_{i \in I} U_i \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X$ აქედან მივიღებთ სურექციულ ასახვას $\coprod_{i \in I} X \twoheadrightarrow Z$ და ღია ჩადგმას $Y \hookrightarrow Z$, სადაც Z არის $\coprod_{i \in I} X$-ისა და Y-ის თანაუკვეთი გაერთიანების ფაქტორსივრცე $a(u) \sim q(u)$ გაიგივების მიმართ, ყოველი $u \in \coprod_{i \in I} U_i$-სთვის. ამრიგად თუ Op/ X -ის რომელიმე ქვეკატეგორია შეიცავს $1_X: X \to X$ -ს და ჩაკეტილია კონამრავლების, ფაქტორობიექტების და ქვეობიექტების მიმართ, მაშნი ის შეიცავს ყველა ლოკალურ ჰომეომორფიზმს. რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

1.3. ალგებრების მრავალნაირობები ბირკჰოფის თეორემა.

სანამ განსახილველი საკითხის ალგებრულ მხარეზე დავიწყებდეთ საუბარს , მოვიყვანოთ რანდენიმე განსაზღვრება.

განსაზღვრება. სიმრავლისათვის A და არაუარყოფითი მთელი რიცხვისათვის n განვსაზღვროთ A^n როგორც n-ეულების სიმრავლე A-დან. n-ადგილიანი ოპერაცია A-ზე არის ნებისმიერი ასახვა $f: A^n \rightarrow A$;რომლითაც $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ -ის ანასახი აღინიშნება $f(a_1, \dots, a_n)$-ით.

ალგებრის სიგნატურა (ან ტიპი) არის f -ფუნქციური სიმბოლოების სიმრავლე $\mathcal{F}$ ისეთი რომ თითოეულ წევრს f შესაბამებული აქვს არაუარყოფითი რიცხვი n , მისი ადგილიანობა.

განსაზღვრება. ალგებრის სინატურისათვის $\mathcal{F}$ (ტიპისათვის) ამ სიგნატურის ალგებრა $\mathcal{A}$ არის დალაგებული წყვილი $\langle A, F \rangle$ სადაც A არის სიმრავლე ხოლო F ოპერაციათა სიმრავლეა დაინდექსებული $\mathcal{F}$ -დან ისე რომ n -ადგილიან ფუნქციურ სიმბოლოს შეესაბამება n-ადგილიან ოპერაცია A-ზე.

გვაქვს ცვლად სიმბოლოთა თვლადი სიმრავლე $\{x_i | \, i \in I\}$ და ფუნქციური სიმბოლოები f_i . განვსაზღვროთ ტერმის ცნება.

- ცვლადი სიმბოლო x ტერმია ,
- თუ $t_1, \dots \ , t_n$ ტერმებია და f n -ადგილიანი ფუნქციური სიმბოლოა მაშინ $f(t_1, \dots \ , t_n)$ ტერმია.
- სხვა სახის ტერმები არ გვაქვს.
-

განსაზღვრება. $\mathcal{F}$ ტიპის იგივეობა არის

$$p \approx q$$

სახის გამოსახულება, სადაც p, q არიან ტერმები. ალგებრა $\mathcal{A}$ აკმაყოფილებს იგივეობას

$$p(x_1, \dots \ , x_n) \approx q(x_1, \dots \ , x_n)$$

(ან რაც იგივეა იგივეობა სრულდება $\mathcal{A}$-ში), აღინიშნება

$$\mathcal{A} \vDash p(x_1, \dots, x_n) \approx q(x_1, \dots, x_n)$$

ან უფრო მოკლედ

$$\mathcal{A} \vDash p \approx q$$

თუ ნებისმიერი ამორჩევისათვის $a_1, \dots, a_n \in A$-დან

$$p^A(a_1, \dots, a_n) = q^A(a_1, \dots, a_n).$$

ალგებრათა კლასი K აკმაყოფილებს იგივეობას $p \approx q$, და დავწერთ

$$K \vDash p \approx q$$

თუ K-ს ყოველი წევრი აკმაყოფილებს ამ იგივეობას. თუ Σ იგივეობათა სიმრავლეა, ვიტყვით რომ K აკმაყოფილებს Σ-ს

$$K \vDash \Sigma,$$

თუ $K \vDash p \approx q$ ყოველი $p \approx q$ იგივეობისათვის Σ-დან.

განსაზღვრება. ვიტყვით რომ $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$ *სიგნატურის* ალგებრათა კლასი, არის *მრავალნაირობა* განსაზღვრული იგივეობათა სიმრავლით Σ, თუ $\mathcal{V}$ შედგება ყველა იმ და მხოლოდ იმ ალგებრებისაგან რომლებიც აკმაყოფილებენ Σ-ს იგივეობებს.

სამართლიანია ბიკჰოფის შესანიშნავი თეორემა

თეორემა(ბირკჰოფი) 1.3.1. ალგებრების კლასი მრავალნაირობაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ის ჩაკეტილია ნამრავლების, ქვეალგებრების და ჰომომორფული ანასახების მიმართ.

2. ლოკალური ჰომეომორფიზმის ანალოგი ესაკიას სივრცეებისათვის.

ესაკიას სივრცეებისათვის ლოკალური ჰომეომორფიზმის ანალოგის განსასაზღვრავად ჩვენ გამოვიყენებთ ასეთ ანალოგიას პრისტლის სივრცეებსა და მათ შორის მინოტონურ ასახვებს განვიხილავთ როგორც ტოპოლოგიური სივრცეებისა და მათ შორის უწყვეტი ასახვების განზოგადებას. ესაკიას სივრცეებსა და ესაკიას მორფიზმებს განვიხილავთ როგორც ტოპოლოგიური სივრცეებისა და ღია ასახვების განზოგადებას.

შევნიშნოთ რომ ეს ანალოგია შემდეგნაირ ინტუიციასაც ემყარება. ნებისმიერი X ტოპოლოგიური სივრცისათვის მისი ღია სიმრავლეები ქმნიან (სრულ) ჰეიტინგის ალგებრას $Op(X)$. შემდეგი დებულება შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც პრისტლისა და ესაკიას ორადობების ანალოგი ტოპოლოგიური სივრცეებისათვის.

დებულება 2.0.1 *(იხ. მაგ. [D], **Lemma 3.1**) ნებისმიერი უწყვეტი ასახვისთვის $f:Y\to X$ ასახვა $f^{-1}:Op(X)\to Op(Y)$ არის დისტრიბუციული მესერების ჰომომორფიზმი (რომელიც ინახავს ნებისმიერ უსასრულო გაერთიანებებს). თუ $f:Y\to X$ ღიაცაა მაშინ $f^{-1}:Op(X)\to Op(Y)$ ჰეიტინგის ალგებრების ჰომომორფიზმიცაა.*

2.1. მკაცრი p-მორფიზმები და მათი ექვივალენტური დახასიათებები.

ზემოაღნიშნული ანალოგიით თუ ვიხელმძღვანელებთ, დებულება 1.2.2-ის შუქზე ბუნებრივია განვსაზღვროთ ესაკიას სივრცეების ლოკალური ჰომეომორფიზმი როგორც ისეთი ესაკიას მორფიზმი $f:Y\to X$ (ღია ასახვის ანალოგი) რომ $\Delta_f:Y\to Y\times_X Y$ აგრეთვე ესაკიას მორფიზმია.

დებულება 2.1.1. *p-მორფიზმისთვის $f:Y\to X$ დალაგებულ სიმრავლეებს შორის ასახვა $\Delta_f:Y\to Y\times_X Y$ აგრეთვე p-მორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც f არის მკაცრი p-მორფიზმი შემდეგი განსაზღვრების აზრით.*

განსაზღვრება. მონოტონურ ასახვას $f\colon (Y,\leq) \to (X,\leq)$ დალაგებულ სიმრავლეებს შორის ეწოდება <u>მკაცრი</u> p-მორფიზმი თუ ნებისმიერი $y \in Y$-თვის და ნებისმიერი $f(y) \leq x \in X$-თვის მოიძებნება <u>ერთადერთი</u> $y \leq y'$ ისეთი რომ $f(y') = x$.

დებულების დამტკიცება. ვთქვათ Δ_f არის p-მორფიზმი, ეს ნიშნავს რომ ნებისმიერი $y \in Y$ და $y \leq y_1$, $y \leq y_2$ -თვის, თუ $f(y_1) = f(y_2)$ მაშინ მოიძებნება ისეთი $y \leq y'$, რომ $\Delta_f(y') = (y_1, y_2)$ ეს კი ნიშნავს რომ $y_1 = y_2$. ვინაიდან f თავად p-მორფიზმია, აქედან გამოდის რომ f მკაცრი p-მორფიზმიცაა.

პირიქით. ვთქვათ f მკაცრი p-მორფიზმია, მაშინ ზუსტად წინა მსჯელობის გამეორებით მივიღებთ რომ Δ_f p-მორფიზმია.

თეორემა 2.1.1. p-მორფიზმი $f\colon (Y,\leq) \to (X,\leq)$ მკაცრი p-მორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა Y-ის ნებისმიერი U ზედა კონუსისთვის Y-ის ზედა კონუსების ჰეიტინგის ალგებრაში სრულდება ტოლობა:

(Ét)
$$\bigvee_W U \leftrightarrow f^{-1}(W) = Y$$

სადაც W გაირბენს X-ის ყველა ზედა კონუსებს.

დამტკიცება. დავუშვათ f მკაცრი p-მორფიზმია. იმისათვის რომ ვაჩვენოთ რომ სრულდება იგივეობა (Ét) საკმარისია ნებისმიერი $y \in Y$-თვის და Y-ის ნებისმიერი U ზედა კონუსისთვის მოვძებნოთ X-ის ისეთი ზედა კონუსი W რომ $\uparrow(y) \cap U = \uparrow(y) \cap f^{-1}(W)$. ავიღოთ $W = f(\uparrow(y) \cap U)$. ვინაიდან f p-მორფიზმია W ზედა კონუსია. და ცხადია $\uparrow(y) \cap U \subseteq f^{-1}(W)$ აქედან კი გამოიდის რომ $\uparrow(y) \cap U \subseteq \uparrow(y) \cap f^{-1}(W)$. მეორესმხრივ რადგანაც f მკაცრი p-მორფიზმია $\uparrow(y) \cap f^{-1}(W) \subseteq U$ და მითუმეტეს $\uparrow(y) \cap f^{-1}(W) \subseteq \uparrow(y) \cap U$. მაშასადამე $\uparrow(y) \cap U = \uparrow(y) \cap f^{-1}(W)$.

ახლა დავუშვათ რომ f აკმაყოფილებს (Ét) პირობას. ვინაიდან f p-მორფიზმია იმისათვის რომ ვაჩვენოთ რომ f მკაცრია საკმარისია ვაჩვენოთ რომ ნებისმიერი $y \in Y$-თვის და ნებისმიერი $y \leq y_1$ და $y \leq y_2$-თვის $f(y_1) = f(y_2)$ -დან გამომდინარეობს რომ $y_1 = y_2$. მართლაც ვთქვათ $y_1 \neq y_2$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ რომ $y_1 \nleq y_2$. ვინაიდან (Ét) იგივეობა სრულდება $U = \uparrow(y_1)$-თვის, მოიძებნება X-ის ისეთი ზედა კონუსი W რომ $\uparrow(y) \cap f^{-1}(W) = \uparrow(y) \cap U = \uparrow(y_1)$. ვინაიდან $y_2 \notin \uparrow(y_1)$ აქედან

$y_2 \notin \uparrow(y) \cap f^{-1}(W)$. რადგან $y_2 \in \uparrow(y)$ ამიტომ $y_2 \notin f^{-1}(W)$, ანუ $f(y_2) \notin W$. მაგრამ $f(y_1) = f(y_2)$ ესეიგი $y_1 \notin f^{-1}(W)$. მაგრამ მაშინ მითუმეტეს $y_1 \notin \uparrow(y) \cap f^{-1}(W) = \uparrow(y_1)$ რაც წინააღმდეგობაა. ამრიგად $y_1 = y_2$.

$(X, \leq)$ დალაგებული სიმრავლისთვის, $P/(X, \leq)$-თი ავღნიშნოთ კატეგორია რომლის ობიექტებია p-მორფიზმები $f: (Y, \leq) \to (X, \leq)$ ხოლო მორფიზმები კომუტატური სამკუთხედები.

$(X, \leq)$ დალაგებული სიმრავლისთვის, $SP/(X, \leq)$-ით ავღნიშნოთ კატეგორია რომლის ობიექტებია მკაცრი p-მორფიზმები $f: (Y, \leq) \to (X, \leq)$ ხოლო მორფიზმები კომუტატური სამკუთხედები.

$\mathfrak{X}$ ესაკიას სივრცისათვის $E/\mathfrak{X}$-ით ავღნიშნოთ კატეგორია რომლის ობიექტებია ესაკიას მორფიზმები $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$, ხოლო მორფიზმები კომუტატური სამკუთხედები.

$\mathfrak{X}$ ესაკიას სივრცისათვის $SE/\mathfrak{X}$-ით ავღნიშნოთ კატეგორია რომლის ობიექტებია ისეთი ესაკიას მორფიზმები $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ რომლებიც მკაცრი p-მორფიზმები არიან, ხოლო მორფიზმები კომუტატური სამკუთხედები.

დებულება 2.1.2. განვიხილოთ ასახვა $f: (Y, \leq) \to (X, \leq)$ დალაგებულ სიმრავლეებს შორის. ავღჭურვოთ X და Y ალექსანდროვის ტოპოლოგიებით(ღია სიმრავლეები ზედა კონუსებია $\leq$-ის აზრით). მაშინ

ა. f -უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ის მონოტონურია.

ბ. f ღიაა და უწყვეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც f p-მორფიზმია.

გ. f ლოკალური ჰომეომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც f მკაცრი p-მორფიზმია.

დამტკიცება. ა და ბ წარმოადგენენ კარგად ცნობილ სტანდარტულ ფაქტებს რომლებიც ძალიან მარტივად მტკიცდება. დავამტკიცოთ გ. ჯერ შევნიშნოთ რომ რადგან f ლოკალური ჰომეომორფიზმია ის ღია ასახვაცაა. ამიტომ ბ-ს ძალით ის p-მორფიზმია. ამასტან შევნიშნოთ რომ ალექსანდროვის ტოპოლოგიაში ყოველ $y \in Y$ წერტილს გააჩნია უმცირესი მიდამო- სახელდობრ $\uparrow y = \{y' \in Y \mid y \leq y'\}$. ამიტომ f ლოკალური ჰომეომორფიზმია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც $f|_{\uparrow y}$

ჰომეომორფიზმია $f(\uparrow y)$-ზე. კერძოდ $f|_{\uparrow y}$ ინექციაა. ანუ ნებისმიერი $y \leq y_1, y \leq y_2$-თვის თუ $y_1 \neq y_2$ მაშინ $f(y_1) \neq f(y_2)$. ეს კი ნიშნავს რომ f მკაცრი p -მორფიზმია.

პირიქით თუ f მკაცრი p -მორფიზმია, მაშინ ყოველი $y \in Y$ წერტილისათვის $f|_{\uparrow y}$ ინექციაა. ვინაიდან f p -მორფიზმიცაა ბ-ს ძალით ის ღია ასახვაა. ამიტომ $f|_{\uparrow y}$ ჰომეომორფიზმია $f(\uparrow y)$-ზე. და ამრიგად f ლოკალური ჰომეომორფიზმია.

სინამდვილეში სამართლიანია უფრო ძლიერი დებულება.

დებულება 2.1.3. ვთქვათ $(X, \leq)$ დალაგებული სიმრავლეა და მოცემულია ლოკალური ჰომეომორფიზმი $f: Y \to X$ სადაც X აღჭურვილია ალექსანდროვის ტოპოლოგიით. მაშინ მოიძებნება ისეთი ნაწილობრივი დალაგება Y-ზე რომ Y -ის ტოპოლოგია ამ დალაგების მიმართ ალექსანდროვის ტოპოლოგიაა და რომლის მიმართაც f იქნება მკაცრი p -მორფიზმი.

დამტკიცება. რადგან f ლოკალური ჰომეომორფიზმია, ყოველ წერტილს $y \in Y$ მოეძებნება ისეთი ღია მიდამო U_y რომ $f|_{U_y}$ ჰომეომორფიზმია $f(U_y)$-ზე. მაგრამ $f(U_y)$ ალექსანდროვის სივრცის ქვესივრცეა, ამიტომ თვითონაც ალექსანდროვის სივრცეა. კერძოდ $f(y)$-ს გააჩნია უმცირესი მიდამო. რადგან $f|_{U_y}$ ჰომეომორფიზმია იგივე თვისება ექნება U_y-ს. ესეიგი U_y-ში y -ს გააჩნია უმცირესი მიდამო $\uparrow y$. რადგან U_y არის y-ის ღია მიდამო, $\uparrow y$ იქნება y-ის უმცირესი მიდამო მთელ Y-ში. მაგრამ როგორც ცნობილია ტოპოლოგიური სივრცე ალექსანდროვისაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც მის ყოველ წერტილს გააჩნია უმცირესი მიდამო. (იხ. [A])

შედეგი 2.1.1. ვთქვათ გვაქვს მონოტონური ასახვები $f: (Y, \leq) \to (X, \leq)$ და $g: (Z, \leq) \to (Y, \leq)$. თუ f და fg მკაცრი p -მორფიზმებია, მაშინ g-ც მკაცრი p -მორფიზმია.

დამტკიცება. დებულება 2.1.2 გ-დან ვიცით რომ f და fg ლოკალური ჰომეომორფიზმებია ალექსანდროვის ტოპოლოგიის მიმართ. როგორც ვნახეთ თეორემა 1.2.1-ის დამტკიცების დასაწყისში მაშინ g -ც ლოკალური ჰომეომორფიზმია. მაშინ კვლავ 2.1.2. გ-ს ძალით g არის მკაცრი p -მორფიზმი.

კატეგორიათა თეორიაში მკაცრი p -მორფიზმები დალაგებულ სიმრავლეებს შორის ცნობილია დისკრეტული ფიბრაციების სახელით (იხ. მაგ. [E] გვ.270 Definition B1.3.10). დისკრეტული ფიბრაციების მნიშვნელობა კატეგორიათა თეორიაში აიხსნება შემდეგი ფაქტით. ვთქვათ $f: (Y, \leq) \to (X, \leq)$ არის მკაცრი p -მორფიზმი დალაგებულ სიმრავლეებს შორის, მაშინ ნებისმიერი $x_1 \leq x_2$-თვის X-დან f ცალსახად განსაზღვრავს ასახვას $f^{-1}(x_1)$ -დან $f^{-1}(x_2)$ -ში. ამით განისაზღვრება ფუნქტორი $F_f: (X, \leq) \to Set$ კატეგორიიდან რომელიც შეესაბამება X-ის დალაგებას სიმრავლეთა კატეგორიაში.

დებულება 2.1.4. *შესაბამისობა $f \mapsto F_f$ განსაზღვრავს კატეგორიების ექვივალენტობას*

$$SP/(X, \leq) \longrightarrow Set^{(X,\leq)}$$

(იხ. მაგ. [E] გვ. 341 Proposition B2.5.3)

კერძოდ ყოველი $(X, \leq)$ დალაგებული სიმრავლისათვის, კატეგორია $SP/(X, \leq)$ ტოპოსია.

თეორემა 2.1.4. *სასრული $\mathcal{X}$ ესაკიას სივრცისათვის შესაბამისობა $f \mapsto F_f$ განსაზღვრავს კატეგორიების ექვივალენტობას*

$$SE/\mathcal{X} \longrightarrow Stone^{\mathcal{X}}$$

დამტკიცება. განვიხილოთ $SE/\mathcal{X}$ -ის ნებისმიერი ობიექტი $f: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. ვინაიდან $\mathcal{X}$ სასრულია, მისი ტოპოლოგია დისკრეტულია, ამიტომ ყოველი $x \in \mathcal{X}$ -სათვის $f^{-1}(x)$ ღია-ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა $\mathcal{Y}$-ში. კერძოდ, ის სტოუნის სივრცეა. გარდა ამისა, იქედან, რომ $f: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ უწყვეტია, გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $x_1 \leq x_2$ -თვის $\mathcal{X}$ -დან დებულება 2.1.4-ის წინ განსაზღვრული ასახვა $f^{-1}(x_1) \longrightarrow f^{-1}(x_2)$ უწყვეტია. ამრიგად ამ შემთხვევაში F_f წარმოადგენს $Stone^{\mathcal{X}}$ კატეგორიის ობიექტს. უფრო მეტიც, თუ მოცემულია $SE/\mathcal{X}$ კატეგორიის მორფიზმი $f_1: \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{X}$ -დან $f_2: \mathcal{Y}_2 \to \mathcal{X}$ -ში, ე. ი. ისეთი უწყვეტი მონოტონური ასახვა $g: \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$ რომ $f_2 g = f_1$, მაშინ გამოწვეული ასახვები $g|_{f_1^{-1}(x)}: f_1^{-1}(x) \longrightarrow f_2^{-1}(x)$ უწყვეტია თითოეული $x \in \mathcal{X}$ -თვის, რაც გვაძლევს ბუნებრივ გარდაქმნას $F_{f_1} \longrightarrow F_{f_2}$. ამრიგად, მივიღეთ ფუნქტორი $\Phi: SE/\mathcal{X} \longrightarrow Stone^{\mathcal{X}}$.

ახლა განვსაზღვროთ ფუნქტორი $\Psi: Stone^{\mathcal{X}} \longrightarrow SE/\mathcal{X}$. სახელდობრ, $Stone^{\mathcal{X}}$ კატეგორიის G ობიექტისათვის $\Psi(G)$ იყოს კანონიკური ასახვა $f_G: \coprod_{x \in \mathcal{X}} G(x) \longrightarrow \mathcal{X}$. აქ $\coprod_{x \in \mathcal{X}} G(x)$ არის $G(x)$ სტოუნის სივრცეების ტოპოლოგიური ჯამი შემდეგი დალაგებით: $y_1 \in G(x_1)$ და

$y_2 \in G(x_2)$-სათვის $y_1 \leq y_2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x_1 \leq x_2$ და შესაბამისი ასახვისას $G(x_1) \to G(x_2)$ გვაქვს $y_1 \mapsto y_2$. ადვილად მოწმდება, რომ ასეთნაირად მართლაც მიიღება $SE/\mathcal{X}$ კატეგორიის ობიექტი. თუ მოცემულია ბუნებრივი გარდაქმნა $\gamma: G_1 \longrightarrow G_2$ კატეგორიაში $Stone^{\mathcal{X}}$, ის იწვევს კანონიკურ უწყვეტ მონოტონურ ასახვას $\coprod_{x\in X} \gamma_x : \coprod_{x\in X} G_1(x) \longrightarrow \coprod_{x\in X} G_2(x)$, და ადვილად მოწმდება, რომ ეს იწვევს მორფიზმს $\Psi(G_1) \longrightarrow \Psi(G_2)$. ამრიგად მივიღეთ ფუნქტორი $\Psi: Stone^{\mathcal{X}} \longrightarrow SE/\mathcal{X}$.

$SE/\mathcal{X}$ -ის ნებისმიერი $f: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ ობიექტისათვის გვაქვს ჰომეომორფიზმი $\mathcal{Y} \to \coprod_{x\in X} f^{-1}(x)$, რაც განსაზღვრავს იზომორფიზმს $\Psi\Phi$ კომპოზიციასა და $SE/\mathcal{X}$ კატეგორიის იგივურ ფუნქტორს შორის. ასევე, ნებისმიერი $G: \mathcal{X} \longrightarrow Stone$ ფუნქტორისთვის და ნებისმიერი $x \in \mathcal{X}$-სათვის სივრცე $G(x)$ შეგვიძლია გავაიგივოთ სივრცესთან $f_G^{-1}(x)$, რაც გვაძლევს ბუნებრივ იზომორფიზმს G-სა და $\Phi\Psi(G)$-ს შორის. ამრიგად, Φ და Ψ ურთიერთშებრუნებული ექვივალენტობებია.

თეორემა 2.1.5. $(X, \leq)$ *დალაგებული სიმრავლისთვის* $SP/(X, \leq)$ *არის უმცირესი სრული ქვეკატეგორია* $P/(X, \leq)$ *-ში რომელიც შეიცავს* $1_X: X \to X$ *-ს და ჩაკეტილია კონამრავლების, ქვეობიექტებისა და ფაქტორობიექტების მიმართ.*

დამტკიცება. ავღჭურვოთ X ალექსანდროვის ტოპოლოგიით. მაშინ თეორემა 1.2.1- ს ძალით LH/X არის უმცირესი სრული ქვეკატეგორია Op/X-ში , რომელიც შეიცავს $1_X: X \to X$-ს და ჩაკეტილია კონამრავლების, ქვეობიექტებისა და ფაქტორობიექტების მიმართ. თავისმხრივ $P/(X, \leq)$ შეიძლება გავაიგივოთ Op/X -ის სრულ ქვეკატეგორიასთან, დებულება 2.1.2 ბ-ს ძალით. ასევე 2.1.2 გ-ს ძალით $SP/(X, \leq)$ შეგვიძლია გავაიგივოთ LH/X -ის სრულ ქვეკატეგორიასთან. ამიტომ საკმარისია დავამტკიცოთ რომ $SP/(X, \leq)$ ემთხვევა LH/X-ს მაგრამ ეს უშუალოდ გამომდინარეობს დებულება 2.1.3-დან.

შედეგი 2.1.2. სასრული ესაკიას სივრცე $\mathfrak{X}$ -თვის, $SE/\mathfrak{X}$-ის სრული ქვეკატეგორია რომლის ობიექტებია ისეთი $\mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ რომლებისთვისაც $\mathfrak{Y}$ სასრულია, ემთხვევა $E/\mathfrak{X}$-ს უმცირეს ქვეკატეგორიას რომელიც შეიცავს $1_{\mathfrak{X}}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ -ს და ჩაკეტილია სასრული კონამრავლების, ქვეობიექტებისა და ფაქტორობიექტების მიმართ.

დამტკიცება. უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 2.1.1-დან შემდეგი ორი გარემოების გათვალისწინებით. პირველი: ესაკიას სივრცე სასრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც მისი ტოპოლოგია დისკრეტულია. მეორე: სასრული (არაცარიელი) ესაკიას სივრცეების რაიმე ოჯახის კონამრავლი სასრულია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც ეს ოჯახი სასრულია.

2.2. შებრუნებული ზღვრები მკაცრი p-მორფიზმების კატეგორიაში.

ამ პარაგრაფის მიზანია შემდეგი თეორემის დამტკიცება:

თეორემა 2.2.1. *ყოველი ესაკიას სივრცე* $\mathfrak{X}$*-თვის დავიწყების ფუნქტორი* $SE/\mathfrak{X} \longrightarrow Set/\mathfrak{X}$ *ინახავს შებრუნებულ ზღვრებს.*

შენიშვნა. სანამ დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ შევნიშნოთ რომ მსგავსი დებულება არ არის სწორი $E/\mathfrak{X}$ -თვის ანუ არამაინცდამაინც მკაცრი p -მორფიზმების კატეგორიისათვის.

თეორმის დამტკიცება. განვიხილოთ დიაგრამა $D: \mathbb{C} \longrightarrow SE/\mathfrak{X}$, სადაც $\mathbb{C}$ მცირე კატეგორიაა. ამრიგად გვაქვს მკაცრი p -მორფიზმების ოჯახი $(f_c: D(c) \longrightarrow \mathfrak{X})_{c\in\mathbb{C}}$ და ასახვები $D(\gamma): D(c) \longrightarrow D(c')$ ყოველი $\gamma: c \longrightarrow c'$-თვის ისეთი რომ $f_{c'}D(\gamma) = f_c$. კერძოდ შედეგი 2.1.1-ის ძალით თითოეული $D(\gamma)$ მკაცრი p-მორფიზმია. ამ დიაგრამის ზღვარი $Set/\mathfrak{X}$-ში იყოს $(f_{lim}: \lim_{\leftarrow} D \longrightarrow \mathfrak{X},\ \pi_c: \lim_{\leftarrow} D \longrightarrow D(c))_{c\in\mathbb{C}}$. სიმრავლე $\lim_{\leftarrow} D$ არის $\prod_{c\in\mathbb{C}} D(c)$ -ს ქვესიმრავლე. ავღჭურვოთ იგი ინდუცირებული ტოპოლოგიით და დალაგებით. როგორც ცნობილია $\lim_{\leftarrow} D$ ამ ტოპოლოგიითა და დალაგებით არის ესაკიას სივრცე. (იხ. მაგ.) ვაჩვენოთ რომ f_{lim} მკაცრი p-მორფიზმი. ვთქვათ მოცემულია ოჯახი $y_* = (y_c)_{c\in\mathbb{C}} \in \lim_{\leftarrow} D$ და ელემენტი $x \geq f_{lim}(y_*)$. ვინაიდან თითოეული c-თვის $f_{lim}(y_*) = f_c(y_c)$ და თითოეული f_c არის მკაცრი p-მორფიზმი თითოეული c-თვის იარსებებს ერთადერთი $z_c \geq y_c$ ისეთი რომ $f_c(z_c) = x$. იქიდან რომ თითოეული $D(\gamma)$ მკაცრი p-მორფიზმია გამომდინარეობს რომ ოჯახი $z_* = (z_c)_{c\in\mathbb{C}}$ ეკუთვნის $\lim_{\leftarrow} D$ -ს. ამრიგად f_{lim} მკაცრი p-მორფიზმია. რადგან $f_c\,\pi_c = f_{lim}$, შედეგი 2.1.1-ის ძალით თითოეული π_c არის მკაცრი p-მორფიზმი.

ვთქვათ მოცემულია კონუსი D დიაგრამაზე $(g: \mathfrak{Z} \longrightarrow \mathfrak{X}, h_c: \mathfrak{Z} \longrightarrow D(c))_{c\in\mathbb{C}}$. გვექნება ერთადერთი ასახვა $l: \mathfrak{Z} \longrightarrow \lim_{\leftarrow} D$ ისეთი რომ $f_{lim} l = g$ და $\pi_c l = h_c$ თითოეული c-თვის. კვლავ შედეგი 2.1.1-დან გამომდინარეობს რომ l მკაცრი p-მორფიზმია. მივიღეთ რომ $\lim_{\leftarrow} D$ აკმაყოფილებს შებრუნებული ზღვრის უნივერსალურ თვისებას $SE/\mathfrak{X}$ კატეგორიაში.

3.ესაკიას სივრცეების ლოკალური ჰომეომორფიზმების ორადული აღწერა.

3.1. ალგებრები H ჰეიტინგის ალგებრაზე როგორც მრავალნაირობა.

განსაზღვრება . H ჰეიტინგის ალგებრისთვის H -*Alg* იყოს ალგებრების შემდეგი მრავალნაირობა: H -*Alg-ის* სიგნატურა შედგება ჰეიტინგის ალგებრების სიგნატურისგან რომელსაც ემატება კონსტანტების ოჯახი $(c_h)_{h\in H}$. H -*Alg-ის* იგივეობებია ჰეიტინგის ალგებრების იგივეობები და შემდეგი იგივეობების ოჯახი: $(c_h \# c_{h'} = c_{h\#h'})_{h,h'\in H}$ სადაც $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, $c_0 = 0$ და $c_1 = 1$.

ამრიგად H -*Alg* ალგებრის სტრუქტურა იგივეა რაც ჰეიტინგის ალგებრა A აღჭურვილი ჰეიტინგის ალგებრების ჰომომორფიზმით $c\colon H \longrightarrow A$.

შევნიშნოთ რომ თავად H კონსტანტებით $c_h = h$ ეკუთვნის H -*Alg* მრავალნაირობას და ის ამ მრავალნაირობის ინიციალური ობიექტია.

3.2. ეტალური H -ალგებრები.

განსაზღვრება. ეტალური H -ალგებრების მრავალნაირობა $\mathcal{V}_H$ არის H -*Alg* მრავალნაირობის ქვემრავალნაირობა წარმოქმნილი H -ით.

ამრიგად ორადობის გავლით $\mathcal{V}_H$ მრავალნაირობა დაახლოებით შეესაბამება H -ის ორადულ ესაკიას სივრცე $\mathfrak{X}$-ზე უწყვეტი p-მორფიზმების კატეგორია $E/\mathfrak{X}$-ში უმცირეს სრულ ქვეკატეგორიას ჩაკეტილს კონამრავლების, ფაქტორობიექტების და ქვეობიექტების მიმართ. დაახლოებით იმიტომ, რომ ესაკიას სივრცეების უსასრულო კონამრავლი არის არა მათი თანაუკვეთი გაერთიანება, არამედ თანაუკვეთი გაერთიანების უნივერსალური კომპაქტიფიკაცია.

3.3. ეტალური H -ალგებრების მრავალნაირობის დახასიათება იგივეობებით სასრული H -თვის.

თეორემა 3.3.1. სასრული ჰეიტინგის ალგებრა H -თვის მრავალნაირობა $\mathcal{V}_H$-ის ყოველი ალგებრა აკმაყოფილებს ერთცვლადიან იგივეობას

(Ét) $$\bigvee_{h\in H} x \leftrightarrow c_h = 1.$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ რომ $1_H: H \to H$ აკმაყოფილებს აღნიშნულ იგივეობას. მართლაც ამ იგივეობაში რომ ჩავსვათ x-ს მაგივრად ნებისმიერი $h \in H$ დიზიუნქციის ერთ-ერთი წევრი სახელდობრ $h \leftrightarrow c_h$ იქნება 1-ის ტოლი ვინაიდან განმარტებით $1_H: H \to H$-ში $h = c_h$. მეორეს მხრივ $\mathcal{V}_H$ წარმოქმნილია $1_H: H \to H$-ით ამიტომ ყოველი მისი ალგებრა აგრეთვე დააკმაყოფილებს ამ იგივეობას.

თეორემა 3.3.2. ვთქვათ H -alg მრავალნაირობის ალგებრა $f: H \longrightarrow A$ აკმაყოფილებს იგივეობას (Ét) მაშინ ორადული ესაკიას სივრცეების მორფიზმი $f_*: \mathcal{X}_A \longrightarrow \mathcal{X}_H$ მკაცრი p-მორფიზმია.

დამტკიცება. ვინაიდან f_* p-მორფიზმია, საკმარისია ვაჩვენოთ რომ ნებისმიერი $y \in \mathcal{X}_A$-თვის და ნებისმიერი $y \le y_1$ და $y \le y_2$-თვის $f_*(y_1) = f_*(y_2)$ -დან გამომდინარეობს რომ $y_1 = y_2$. მართლაც ვთქვათ $y_1 \neq y_2$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ რომ $y_1 \nleq y_2$. მაშინ პრისტლის განცალების აქსიომის გამო მოიძებნება ისეთი ღია-ჩაკეტილი ზედა კონუსი $a \subseteq \mathcal{X}_A$ რომ $y_1 \in a$ და $y_2 \notin a$. ესაკიას ორადობით $\mathcal{X}_A$-ს ღია-ჩაკეტილი ზედა კონუსები შეგვიძლია გავაიგივოთ A-ს ელემენტებთან. ვინაიდან A აკმაყოფილებს (Ét) იგივეობას a -ს შესაბამისი A -ს ელემენტისათვის გვექნება $\bigvee_{h\in H} a \leftrightarrow c_h = 1$ რაც ორადულად ნიშნავს $\bigcup_{h\in H} a \leftrightarrow f_*^{-1}(h) = \mathcal{X}_A$. კერძოდ მოიძებნება ისეთი $h \in H$, რომ $y \in a \leftrightarrow f_*^{-1}(h)$. ეს კი ექვივალენტურია იმის, რომ არსებობს ღია-ჩაკეტილი ზედა კონუსი $y \in c \subseteq \mathcal{X}_A$ ისეთი რომ $c \wedge a = c \wedge f_*^{-1}(h)$. მაშინ იმავე მსჯელობით რაც თეორემა 2.1.1-ის დამტკიცების ბოლო ნაწილში მივიღებთ წინააღმდეგობას. ასე რომ $y_1 = y_2$.

შედეგი. არსებობს სრული ჩადგმა $\mathcal{V}_H{}^{op} \longrightarrow SE/\mathcal{X}_H$

დამტკიცება. თეორემა 3.3.1-დან გამომდინარეობს, რომ $\mathcal{V}_H$-ს ყველა ობიექტი აკმაყოფილებს (Ét) იგივეობას. ამიტომ თეორემა 3.3.2-ის ძალით ყოველი

$f: H \longrightarrow A$-თვის ორადული ასახვა $f_*: \mathcal{X}_A \longrightarrow \mathcal{X}_H$ არის $SE/\mathcal{X}_H$-ის ობიექტი. ესაკიას ორადობის გამოყენებით ვღებულობთ საჭირო სრულ ჩადგმას.

დასკვნა

ჩატარებულმა გამოკვლევამ აჩვენა რომ მკაცრი ესაკიას მორფიზმები ფიქსირებულ სასრულ ესაკიას სივრცეზე საკმაოდ ახლოსაა ესაკიას სასრულ სივრცეზე ლოკალური ჰომეომორფიზმის ცნებისთან. შესწავლილი იქნა შესაბამისი ეტალური ალგებრები და დადგენილიქნა მათი შესაბამისი იგივეობა. ასევე დადგენილიქნა რომ სასრულ ესაკიას სივრცეზე მკაცრი ესაკიას მორფიზმების კატეგორია არ წარმოადგენს ტოპოსს მაგრამ აქვს რიგი კარგი, ტოპოსისმაგვარი თვისებებისა.

ჩატარებული სამუშაოდან გამომდინარე ცხადი გახდა რომ მსგავსი კატეგორიები უფრო ღრმა შესწავლას საჭიროებენ. ამას ის გარმოებაც უწყობს ხელს რომ მსგავსი კატეგორიების იმ თვისებების გამო რაც უკვე აღმოჩენილიქნა არსებობს საფუძვლიანი იმედი იმისა რომ შესაძლებელი იქნება ასეთი კატეგორიების, მაღალი რიგის ლოგიკების შესწავლისათვის გამოყენება. კერძოდ ზემოთხსენებული პიტსის პრობლემის პატარაიას ამოხსნის გამარტივების საქმეში. თუმცა ამისათვის სამუშაო კიდევ არის ჩასატარებელი.

ლიტერატურა.

[A] Alexandroff, P. (1937). "Diskrete Räume". Mat. Sb. (N.S.) (in German) 2: 501–518

[D] H Dobbertin - Measurable refinement monoids and applications to distributive semilattices, Heyting algebras, and stone spaces. Math. Z. 187 (1984), pp. 13-21

[DP] B. A. Davey, H. A. Priestley Introduction to Lattices and Order Cambridge University Press, 2002 298 p.

[E] P.T Johnstone - Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium Oxford Logic Guides, Oxford 2002, 1248 p.

[ES] Esakia, L. Heyting Algebras I. Duality Theory (Russian). Metsniereba, Tbilisi 1985.

[FS] Michael P. Fourman, Dana S. Scott – Sheaves and logic. “Applications of Sheaves, Durham 1977”, Lecture Notes in Mathematics 753, Springer 1977, pp. 302-401

[BD] R. Balbes and P. Dwinger. Distributive Lattices. University of Missouri Press, 1974.

[BS] R. Burris and H. Sankappanavar. A Course in Universal Algebra. Springer, 1981.

[SS] P. Johnstone. Stone Spaces. Cambridge University Press, 1982.