ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სტუდენტის

ვალერი ბერიკაშვილის

სტუდენტური პროექტი

„დიდ რიცხვთა კანონის შესახებ ჰილბერტის სივრცეში“

ხელმძღვანელი - ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი
პროფესორი *ვახტანგ კვარაცხელია*

თბილისი, 2014 წელი

შესავალი

ალბათობის თეორია წარმოადგენს მათემატიკის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს დარგს, რომელიც სპეციალისტებს იზიდავს როგორც შემდგომი კვლევითი პერსპექტივის მრავალფეროვნებით, ასევე პრაქტიკული გამოყენებების სიმრავლითაც. არც თუ ისე ადვილია დავასახელოთ თეორიული თუ გამოყენებითი მეცნიერებების, ეკონომიკისა და ბიზნესის, სოციალური მეცნიერებების ისეთი დარგი, რომელიც ამა თუ იმ ფორმით არ იყენებს ალბათობის თეორიას. ის, რომ ალბათობის თეორია ხასიათდება გამოყენებების სიმრავლით, ძირითადად განპირობებულია ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემებით. წინამდებარე ნაშრომი ეხება ერთ-ერთ მათგანს, სახელდობრ დიდ რიცხვთა კანონს. გარდა შესავალი ნაწილისა, ნაშრომი შედგება ორი ნაწილისაგან, რომელთაგან პირველში მოცემულია დიდ რიცხვთა კანონის განვითარების ძირითადი ეტაპები დამტკიცებებითურთ, ხოლო ბოლო ნაწილში ჩამოყალიბებულია და დამტკიცებულია ამ ნაშრომის მთავარი მიზანი – დიდ რიცხვთა კანონი სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცეში მნიშვნელობების მქონე სუსტად დამოკიდებული შემთხვევითი ელემენტებისათვის.

ისტორიულად დიდ რიცხვთა კანონი პირველად აღმოაჩინა და დაამტკიცა გამოჩენილმა შვეიცარიელმა მეცნიერმა იაკობ ბერნულიმ. ეს შედეგი, რომელიც შემდგომში ცნობილი გახდა ბერნულის თეორემის სახელწოდებით, გამოქვეყნდა 1713 წელს, ი. ბერნულის გარდაცვალებიდან 8 წლის შემდეგ.

ცხადია, ფორმალურმა მათემატიკურმა თეორიამ შეიძლება არც არასდროს მიმართოს რეალურ ცხოვრებას, მაგრამ იგი აუცილებლად უნდა შეიცავდეს იმ მოვლენის თეორიულ მოდელს, რომლის ახსნასაც ცდილობს. ასე მაგალითად, ალბათობაზე ჩვენი ინტუიციური წარმოდგენა დამყარებულია შემდეგ მოსაზრებაზე. თუ n ერთნაირ ცდათა მიმდევრობაში A ხდომილება მოხდა n_A-ჯერ და თუ n ძალიან დიდი რიცხვია, მაშინ შეფარდება n_A / n ახლოს უნდა იყოს A ხდომილების p ალბათობასთან. რა თქმა უნდა სასურველია, რომ ალბათობის თეორიის ჩარჩოებში ეს, გარკვეულწილად არამკაფიო მოსაზრება, ვაქციოთ ზუსტ მათემატიკურ თეორემად. სწორედ ამ როლს ასრულებს ბერნულის თეორემა – ალბათობის თეორიის ისტორიულად პირველი ზღვარითი თეორემა.

ერთი საუკუნის შემდეგ, 1837 წელს, სიმეონ პუასონმა დაამტკიცა ანალოგიური თეორემა უფრო ზოგად პირობებში. აღსანიშნავია, რომ ტერმინი "დიდ რიცხვთა კანონი" სამეცნიერო ლიტერატურაში პირველად შემოიტანა და დაამკვიდრა პუასონმა.

1867 წელს ნაშრომში "საშუალო მნიშვნელობების შესახებ" გამოჩენილი რუსი მათემატიკოსის პ.ლ. ჩებიშევის მიერ შემოთავაზებული და განვითარებული იქნა კვლევის მარტივი მეთოდი, რომელიც ძალიან ეფექტური გამოდგა სტოქასტურ ანალიზში. ბერნული და პუასონი განიხილავდნენ მხოლოდ ხდომილებებს და მათ ალბათობებს, ჩებიშევმა კი პირველმა მიაქცია ყურადღება შემთხვევით სიდიდეებს. შედეგი, რომელიც მან მიი-

დო, ცნობილია როგორც დიდ რიცხვთა კანონი ჩებიშევის ფორმით.

თუ ჩებიშევის მეთოდი არსებითად იყენებს დისპერსიის არსებობას, XX საუკუნის 20-იანი წლების მიწურულს ცნობილმა რუსმა მათემატიკოსმა ა.ი. ხინჩინმა დაამტკიცა დიდ რიცხვთა კანონი დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებისათვის, რომელთათვისაც მოითხოვა მხოლოდ პირველი მომენტის (მათემატიკური მოლოდინის) არსებობა.

ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი შედეგი წარმოადგენს დიდ რიცხვთა ეგრეთ წოდებული სუსტი კანონის სხვადასხვა ფორმებს. დიდ რიცხვთა სუსტი კანონიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი საკმარისად დიდი n-სათვის შემთხვევით სიდიდეთა ჯამსა და მის მათემატიკურ მოლოდინს შორის სხვაობა $\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right|$ მოსალოდნელია იყოს n-თან შედარებით მცირე. მაგრამ ეს, საზოგადოდ, არ ნიშნავს, რომ შეფარდება $\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right|/n$ არის მცირე ყველა n-სათვის. დიდ რიცხვთა სუსტი კანონი ამტკიცებს მხოლოდ იმას, რომ შეფარდება $\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right|/n$ დიდ მნიშვნელობებს ძალიან იშვიათად ღებულობს. სუსტი კანონისგან განსხვავებით ამ გარემოებას აზუსტებს დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი, რომელიც პირველად, ბერნულის სქემის კერძო შემთხვევაში როცა $p=1/2$, ჩამოაყალიბა და დაამტკიცა გამოჩენილმა ფრანგმა მათემატიკოს-

მა ე. ბორელმა 1909 წელს. ხოლო 1917 წელს ეს ფაქტი ნებისმიერი p-სათვის დაამტკიცა იტალიელმა მათემატიკოსმა კანტელიმ და იგი მოკლედ შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\mathrm{P}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}=p\right]=1.$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ დიდ რიცხვთა სუსტი კანონი ამტკიცებს, რომ n-ის ზრდასთან ერთად შეფარდება $\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right|/n$ ალბათურად მიისწრაფვის 0-საკენ, დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი ამტკიცებს, რომ n-ის ზრდასთან ერთად შეფარდება $\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)\right|/n$ მიისწრაფვის ნულისაკენ ყოველ $\omega\in\Omega\setminus A$ წერტილში, სადაც Ω არის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე, რომელზედაც განსაზღვრულია ყველა მოცემული შემთხვევითი სიდიდე ξ_i, ხოლო A არის სიმრავლე, რომლის ალბათობა ნულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ დიდ რიცხვთა კანონის მიმართულებით მიღებული შედეგები ძირითადად ეხება დამოუკიდებელ (ან არაკორელირებულ) შემთხვევით სიდიდეებს. შედარებით მცირეა ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები იმ შემთხვევაში, როცა შემთხვევით სიდიდეებს გააჩნიათ არანულოვანი კოვარიაციები.

გასული საუკუნის მეორე ნახევრიდან დაიწყო ზღვარითი თეორემების შესწავლა უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებში, რომლებმაც თავისი სპეციფიკა შეიტანა აღნიშნულ პრობლემატიკაში. უკანასკნელ წლებში სხვადასხვა ქვეყნის მათემატიკოსთა ნაშრომებში ინტენსიურად განიხილება ეგრეთ წოდებული

გადანაცვლებადი დიდ რიცხვთა კანონი (ამბობენ, რომ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ აკმაყოფილებს გადანაცვლებად დიდ რიცხვთა კანონს, თუ არსებობს N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ისეთი გადანაცვლება $\pi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, რომ გადანაცვლებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_{\pi(1)}, \xi_{\pi(2)}, \ldots, \xi_{\pi(n)}, \ldots$ აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს).

ნაშრომის ბოლო ნაწილი ეხება დიდ რიცხვთა კანონს სეპარაბელურ ჰილბერტის სივრცეში. კერძოდ, ჩამოყალიბებულია და დამტკიცებულია ხინჩინისა და ბერნშტეინის თეორემების ანალოგები ჰილბერტის სივრცის შემთხვევაში.

დიდ რიცხვთა კანონთან დაკავშირებული საკითხები დაწვრილებით არის გაშუქებული, მაგალითად, ნაშრომებში [1-7].

1. დიდ რიცხვთა კანონი

ვთქვათ, შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ განსაზღვრულია ალბათურ სივრცეზე (Ω, F, P) და დავუშვათ, რომ მოცემულ შემთხვევით სიდიდეებს გააჩნიათ მათემატიკური მოლოდინი. აღვნიშნოთ $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, n = 1,2, \ldots$.

ჩვენ ვიტყვით, რომ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ აკმაყოფილებს **დიდ რიცხვთა სუსტ კანონს**, თუ მიმდევრობა $\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{n}$ ალბათურად მიისწრაფვის ნულისაკენ, ანუ

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\left|\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{n}\right| > \varepsilon\right] = 0$$

ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის, სადაც E არის მათემატიკური მოლოდინის სიმბოლო.

ჩვენ ვიტყვით, რომ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ აკმაყოფილებს **დიდ რიცხვთა გაძლიერებულ კანონს**, თუ მიმდევრობა $\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{n}$ თითქმის ყველგან მიისწრაფვის ნულისაკენ, ანუ

$$\mathrm{P}\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{S_n - \mathrm{E}\, S_n}{n}\right| = 0\right] = 1 .$$

როგორც ვიცით, თუ მიმდევრობა თითქმის ყველგან იკრიბება ნულისკენ, მაშინ იგი იკრიბება ნულისკენ ალბათურადაც. შებრუნებული დებულება საზოგადოდ სწორი არ არის. აქედან გამომდინარე, თუ მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ აკმაყოფილებს

დიდ რიცხვთა გაძლიერებულ კანონს, მაშინ იგი აგრეთვე აკმაყოფილებს **დიდ რიცხვთა სუსტ კანონს**. პირიქით კი, საზოგადოდ, სწორი არ არის.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, პირველ დიდ რიცხვთა კანონს წარმოადგენს ბერნულის თეორემა, რომელიც ავტორმა ბერნულის სქემისათვის ჩამოაყალიბა. შევნიშნოთ, რომ დამოუკიდებელ ორ შედეგიან ცდათა მიმდევრობას, სადაც თითოეულ ცდაში ჩვენთვის საინტერესო ხდომილების მოხდენის ალბათობა არის ერთი და იგივე რიცხვი, ბერნულის სქემა ეწოდება. ვთქვათ, ერთსა და იმავე ცდას ვატარებთ n-ჯერ და ვთქვათ, თითოეულ ცდაში ვაფიქსირებთ რაიმე A ხდომილების მოხდენას. თითოეულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობა აღვნიშნოთ p-თი, $0<p<1$, და ვთქვათ, k არის ამ n ჩატარებულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის რაოდენობა. ცხადია, $0 \le k \le n$. ალბათობა იმისა, რომ n ჩატარებულ ცდაში A ხდომილება მოხდება ზუსტად k-ჯერ, აღვნიშნოთ $\mathrm{P}_n(k)$-თი. $\mathrm{P}_n(k)$-ს ბერნულის ალბათობას უწოდებენ და იგი გამოითვლება ფორმულით

$$\mathrm{P}_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,\dots,n\,.$$

ξ_i-თი აღვნიშნოთ შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობა 1-ს, თუ i-ურ ცდაში მოხდა ხდომილება A და ღებულობს მნიშვნელობა 0-ს, თუ i-ურ ცდაში არ მოხდა ხდომილება A, $i=1,2,\dots,n$. ცხადია, ყველა ξ_i-ს გააჩნია ერთი და იგივე განაწილების კანონი

$$\xi_i : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix},$$

$\mathrm{E}\xi_i = p$ და რადგან ცდები ტარდება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, ამიტომ შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_i, i = 1,2,\ldots,n$ არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. გარდა ამისა, ცხადია, რომ ξ_i-ს განსაზღვრების გამო ჯამი $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ აღნიშნავს n ჩატარებულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის n_A რაოდენობას. ამიტომ

$$\mathrm{P}[S_n = k] = \mathrm{P}_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0,1,\ldots,n.$$

ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ ბერნულის თეორემა. შევნიშნოთ, რომ ეს დამტკიცება მაქსიმალურად არის მიახლოებული თვით ბერნულის ორიგინალურ დამტკიცებასთან და იგი იყენებს მხოლოდ ბერნულის სქემის და ბერნულის ალბათობების თვისებებს.

ბერნულის თეორემა. *ვთქვათ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომლებიც იღებენ მნიშვნელობებს 1 ან 0 შესაბამისად p და $q = 1-p$ ალბათობებით, $0 < p < 1$. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სათვის სრულდება ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\left|\frac{S_n - \mathrm{E}\,S_n}{n}\right| > \varepsilon\right] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right] = 0.$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

$$(a) \qquad \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_n(k) = 1;$$

$$(b) \qquad \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{P}_n(k) = np;$$

$$(c) \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\,\mathrm{P}_n(k) = n^2p^2 + npq.$$

მართლაც,

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_n(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1;$$

$$(b)\ \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np;$$

$$(c)\ \sum_{k=0}^{n} k^2\,\mathrm{P}_n(k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)]!} p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[(k-1)+1]n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} +$$

$$+ np\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = n^2p^2 - np^2 + np = n^2p^2 + npq.$$

შევნიშნოთ, რომ $\left[\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right]$ და $\left[\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right]$ ურთიერთსაწინააღმდეგო ხდომილებებია და ამიტომ

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right] = 1 - \mathrm{P}\left[\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right].$$

გარდა ამისა, მარტივი გარდაქმნებით და (a), (b), (c) ტოლობების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right]=\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon}\mathrm{P}_n(k)\le\sum_{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon}\frac{\left(\frac{k}{n}-p\right)^2}{\varepsilon^2}\mathrm{P}_n(k)\le\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}-p\right)^2}{\varepsilon^2}\mathrm{P}_n(k)\le$$

$$\le\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2\,\mathrm{P}_n(k)=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left[\sum_{k=0}^{n}k^2\,\mathrm{P}_n(k)-2np\sum_{k=0}^{n}k\,\mathrm{P}_n(k)+n^2p^2\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}_n(k)\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left[n^2p^2+npq-2n^2p^2+n^2p^2\right]=\frac{pq}{n^2\varepsilon^2}\le\frac{1}{4n^2\varepsilon^2},$$

რითაც სრულდება ბერნულის თეორემის დამტკიცება.

ჩამოვაყალიბოთ ბერნულის თეორემა ბერნულის სქემის ტრადიციულ ტერმინებში.

თეორემა. *ვთქვათ, n_A არის A ხდომილების მოხდენის რაოდენობა n დამოუკიდებელ ცდაში და p არის თითოეულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობა. მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$, სრულდება ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left[\left|\frac{n_A}{n}-p\right|>\varepsilon\right]=0.$$

ბერნულის ეს თეორემა განაზოგადა პუასონმა, რომელმაც განიხილა n დამოუკიდებელ ცდათა მიმდევრობა, სადაც თითოეულ ცდაში A ხდომილების მოხდენის p_i ალბათობა დამოკიდებულია ცდის ნომერზე.

პუასონის თეორემა. *ვთქვათ, n_A არის A ხდომილების მოხდენის რაოდენობა n დამოუკიდებელ ცდაში და p_i არის i-*

ურ ცდაში A *ხდომილების მოხდენის ალბათობა. მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს* $\varepsilon > 0$, *სრულდება ტოლობა*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left[\left|\frac{n_A}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right| > \varepsilon\right] = 0 .$$

დიდ რიცხვთა კანონის განვითარებას მძლავრი ბიძგი მისცა 1867 წელს გამოქვეყნებულმა ჩებიშევის ნაშრომმა “საშუალო მნიშვნელობების შესახებ”. ამ ნაშრომში პირველად იქნა ჩამოყალიბებული და დამტკიცებული დიდ რიცხვთა კანონი შემთხვევითი სიდიდეების ტერმინებში (დიდ რიცხვთა კანონი ჩებიშევის ფორმით), რომელიც დღეს ალბათობის თეორიის ყველა სახელმძღვანელოშია.

მისი დამტკიცება ეყრდნობა უტოლობას, რომელიც ჩებიშევის უტოლობის სახელითაა ცნობილი.

ჩებიშევის უტოლობა. *ვთქვათ,* ξ *შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინია* $\mathrm{E}\,\xi$ *და დისპერსია* $D\,\xi$. *მაშინ ყოველი* $\varepsilon > 0$*-სათვის*

$$\mathrm{P}\left[|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{D\,\xi}{\varepsilon^2} .$$

დამტკიცება. ნებისმიერი B სიმრავლის ინდიკატორი I_B განისაზღვრება ტოლობით:

$$I_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{თუ} \quad \omega \in B, \\ 0, & \text{თუ} \quad \omega \notin B. \end{cases}$$

თუ $\left[\dfrac{|\xi - \mathrm{E}\,\xi|}{\varepsilon} \geq 1\right]$ სიმრავლის ინდიკატორს აღვნიშნავთ $I_{\left[\frac{|\xi-\mathrm{E}\,\xi|}{\varepsilon}\geq 1\right]}$-თი, მაშინ დისპერსიის განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$D\,\xi = \mathrm{E}\left(\xi - \mathrm{E}\,\xi\right)^2 \geq \mathrm{E}\left(\xi - \mathrm{E}\,\xi\right)^2 I_{\left[\frac{|\xi-\mathrm{E}\,\xi|}{\varepsilon}\geq 1\right]} \geq \varepsilon^2\,\mathrm{E}\,I_{\left[\frac{|\xi-\mathrm{E}\,\xi|}{\varepsilon}\geq 1\right]} =$$

$$= \varepsilon^2\,\mathrm{P}\left[|\xi - \mathrm{E}\,\xi| \geq \varepsilon\right],$$

საიდანაც ვღებულობთ დასამტკიცებელ უტოლობას.

დიდ რიცხვთა კანონი ჩებიშევის ფორმით. *ვთქვათ,* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *არის წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, რომელთა დისპერსიები შემოსაზღვრული ერთიდაიგივე სასრული მუდმივით*

$$D\xi_k \leq C < \infty, \quad k = 1,2,\ldots,$$

მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$*-სათვის*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\right| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

დამტკიცება. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ შემთხვევითი სიდიდეების წყვილწყვილად დამოუკიდებლობის გამო ადგილი აქვს ტოლობას

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k.$$

დისპერსიების ერთობლიობაში შემოსაზღვრულობის გამო

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \le \frac{C}{n}.$$

ჩებიშევის უტოლობის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)}{\varepsilon^2} \le \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე როდესაც $n\to\infty$, მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\right| \ge \varepsilon\right\} = 0,$$

რაც ამთავრებს თეორემის დამტკიცებას.

ცხადია, რომ ამ თეორემის შედეგს წარმოადგენენ ბერნულის და პუასონის თეორემები, რადგან $\xi_i : \begin{pmatrix}1 & 0\\ p_i & 1-p_i\end{pmatrix}$ შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებლებია და მათი დისპერსია $D\,\xi_i = p_i(1-p_i) \le 1/4$ ყოველი i-სათვის.

აღვნიშნოთ ჩებიშევის თეორემის სხვა შედეგიც.

შედეგი. *ვთქვათ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ არის დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა, რომელთაც გააჩნიათ სასრული დისპერსია. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n} - E\xi_1\right| \ge \varepsilon\right\} = 0.$$

თუ ყურადღებით დავაკვირდებით ჩებიშევის თეორემის დამტკიცებას, შევამჩნევთ, რომ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობა მოთხოვნილია დისპერსიის ადიტიურობის თვისების უზრუნველსაყოფად. მაგრამ, როგორც ვიცით, დისპერსიის ადიტიურობისათვის საკმარისია შემთხვევითი სიდიდეები იყოს არაკორელირებულები, ანუ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$\mathrm{E}\left(\xi_i - \mathrm{E}\,\xi_i\right)\left(\xi_j - \mathrm{E}\,\xi_j\right) = 0 \quad \text{როცა} \quad i \neq j\,.$$

კერძოდ, თუ გავიმეორებთ ჩებიშევის თეორემის დამტკიცების გზას, ადვილად მივიღებთ შემდეგ დებულებას

თეორემა. *ვთქვათ,* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებია და სრულდება პირობა*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} D\xi_i}{n^2} = 0$$

მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$*-სათვის სამართლიანია ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathrm{E}\,\xi_1 + \mathrm{E}\,\xi_2 + \ldots + \mathrm{E}\,\xi_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right] = 0\,.$$

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით ადვილად შეგვიძლია დავამტკიცოთ დიდ რიცხვთა კანონი დამოუკიდებლობის ან არაკორელირებულობის მოთხოვნის გარეშე. სახელდობრ, სამართლიანია

მარკოვის თეორემა. *თუ შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *ისეთია, რომ*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)}{n^2} = 0,$$

მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$*-სათვის სამართლიანია ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathrm{E}\,\xi_1 + \mathrm{E}\,\xi_2 + \ldots + \mathrm{E}\,\xi_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right] = 0.$$

თუ შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ წყვილ-წყვილად და-მოუკიდებელია, მაშინ მარკოვის პირობა მიიღებს სახეს:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} D\xi_i}{n^2} = 0.$$

აქედან ჩანს, რომ ჩებიშევის თეორემა წარმოადგენს მარკოვის თეორემის კერძო შემთხვევას.

პირველი შედეგი, სადაც დაფიქსირდა აუცილებელი და საკმარისი პირობა დიდ რიცხვთა კანონის შესრულებისათვის, მიღებული იქნა 1923 წელს ხინჩინის მიერ.

ხინჩინის თეორემა. *დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\mathrm{E}|\xi_i| < \infty$.

შევნიშნოთ, რომ არსებობს თეორემა, რომელიც შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი მიმდევრობისათვის იძლევა აუცილებელ და საკმარის პირობას დიდ რიცხვთა კანონის შესრულები-

სათვის, მაგრამ ამ პირობის ფაქტობრივი გამოყენება რეალურ სიტუაციებში საკმარისად პრობლემურია.

შევეხოთ ბერნულის თეორემის ერთ გამოყენებას, რომელიც გასული საუკუნის ორმოციან წლებში ბერნშტეინმა აღმოაჩინა და ეხება უწყვეტი ფუნქციების პოლინომებით აპროქსიმაციას. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ლაპარაკია ვაიერშტრასის ცნობილი თეორემის ალბათური დამტკიცების შესახებ.

ვთქვათ, მოცემულია $[0,1]$ ჩაკეტილ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია $f(x)$, ხოლო $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომლებიც იღებენ მნიშვნელობებს 1 ან 0 ალბათობებით p და $q = 1 - p$. როგორც უკვე აღვნიშნეთ

$$\mathrm{P}\left[\xi_1 + \ldots + \xi_n = k\right] = C_n^k p^k q^{n-k},$$

სადაც $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. ადვილად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში

$$\mathrm{E}\left(f\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = B_n(p).$$

პოლინომს $B_n(p) \equiv \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$, რომელიც p-ს მიმართ n-ური რიგის პოლინომს წარმოადგენს, ბერნშტეინის პოლინომს უწოდებენ.

სამართლიანია შემდეგი

ვაიერშტრასის თეორემა. *ვთქვათ, მოცემულია* $[0,1]$ *ჩაკეტილ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია* $f(x)$. *მაშინ*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\le p\le 1} |f(p) - B_n(p)| = 0$$

დამტკიცება. რადგან ჩაკეტილი სეგმენტი $[0,1]$ კომპაქტურია, ამიტომ მასზე განსაზღვრული უწყვეტი f ფუნქცია თანაბრად უწყვეტი და შემოსაზღვრულია რაიმე სასრული დადებითი M მუდმივით. ნებისმიერი $\eta > 0$-სათვის შევარჩიოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$|f(x) - f(y)| \le \eta \text{ როცა } |x - y| \le \delta \text{ და } 0 \le x, y \le 1.$$

მაშინ ყოველი p-სათვის, $p \in [0,1]$, გვექნება:

$$|f(p) - B_n(p)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}\right| \le$$

$$\le \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|\ge\varepsilon} \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}.$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში პირველი შესაკრები, f ფუნქციის თანაბრად უწყვეტობის გამო, არ აღემატება η-ს, ხოლო მეორე შესაკრები ნაკლებია შემდეგ გამოსახულებაზე

$$2M \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|\ge\varepsilon} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = 2M\, \mathrm{P}\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right].$$

ბერნულის თეორემის დამტკიცებისას, ჩვენ მიღებული გვქონდა შემდეგი შეფასება

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right] \le 1 / 4n^2\varepsilon^2,$$

რომლის გათვალისწინებითაც გვექნება

$$2M \sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon} C_n^k \; p^k(1-p)^{n-k} = 2M \; \mathrm{P}\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right] \leq M\left(2n\varepsilon^2\right)^{-1}.$$

ამრიგად, ამ ორი შეფასების გაერთიანებით ვღებულობთ

$$\left|f(p) - B_n(p)\right| \leq \eta + \frac{M}{2n\varepsilon^2}.$$

მაშასადამე, საკმარისად დიდი n-სათვის მაქსიმალური გადახრა იქნება 2η-ზე ნაკლები, რითაც თეორემის დამტკიცება დასრულებულია.

2. დიდ რიცხვთა კანონი სუსტად დამოკიდებული შემთხვევითი ელემენტებისათვის ჰილბერტის სივრცეში

ნაშრომის ამ ნაწილში ვიხილავთ შემთხვევით ელემენტებს მნიშვნელობებით სეპარაბელურ ჰილბერტის სივრცეში. აქ ჩამოყალიბებული და დამტკიცებულია ნაშრომის მთავარი მიზანი – დიდ რიცხვთა კანონი სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცეში მნიშვნელობების მქონე სუსტად დამოკიდებული შემთხვევითი ელემენტებისათვის. გადმოცემისათვის საჭირო ცნებები და ფაქტები უფრო დაწვრილებით მოცემულია მონოგრაფიაში [8].

ვთქვათ, H სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცეა სკალარული ნამრავლით (x, y), $x, y \in H$. როგორც ვიცით, ნორმა H სივრცეში მოიცემა სკალარული ნამრავლით $\|x\| = \sqrt{(x, x)}, x \in H$.

(φ_i)-თი აღვნიშნოთ H-ის ორთონორმირებული ბაზისი (ე.ი. ნებისმიერი $x \in H$-სათვის $x = \sum_i (\varphi_i, x)\varphi_i$ და $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1,2, \ldots$, სადაც მწკრივი იკრიბება H-ის ნორმის ტოპოლოგიაში, ხოლო δ_{ij} არის კრონეკერის სიმბოლო). $\mathrm{B}(H)$-ით აღვნიშნოთ ბორელის σ-ალგებრა H-ში (ანუ ის მინიმალური σ-ალგებრა, რომელიც შეიცავს H-ის ღია სიმრავლეებს). გადასახვას $\xi : \Omega \to H$ ეწოდება შემთხვევითი ელემენტი მნიშვნელობებით H-ში, თუ $\xi^{-1}(\mathrm{B}(H)) \subset F$, სადაც Ω არის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე და F არის Ω-ზე განსაზღვრული σ-ალგებრა. ამრიგად, ξ-ს ვუწოდებთ შემთხვევით ელემენტს, თუ იგი არის ზომადი გადასახვა $\xi : \Omega \to H$.

ჩვენ ვიტყვით, რომ ξ შემთხვევით ელემენტს გააჩნია სუსტი მეორე რიგი, თუ $\mathrm{E}\,(h,\xi)^2 < \infty$ ყოველი $h \in H$-სათვის, სადაც E არის მათემატიკური მოლოდინის აღმნიშვნელი სიმბოლო. მტკიცდება, რომ თუ შემთხვევით ელემენტს გააჩნია სუსტი მეორე რიგი, მაშინ მას გააჩნია აგრეთვე მათემატიკური მოლოდინი, რომელიც განისაზღვრება როგორც პეტისის ინტეგრალი ξ შემთხვევითი ელემენტიდან, ანუ, ξ-ს გააჩნია მათემატიკური მოლოდინი, თუ არსებობს ისეთი ელემენტი $a \in H$, რომ $(h,a) = \mathrm{E}\,(h,\xi)$ ყოველი $h \in H$-სათვის. სწორედ ამ a ელემენტს ეწოდება ξ შემთხვევითი ელემენტის მათემატიკური მოლოდინი. ზოგადობის შეუზღუდავად და გადმოცემის სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ $\mathrm{E}\,\xi = 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ξ-ს ნაცვლად განვიხილავთ $\xi - a$ შემთხვევით ელემენტს). ყოველი სუსტი მეორე რიგის შემთხვევითი ელემენტისათვის განისაზღვრება კოვარიაციული ოპერატორი შემდეგი ტოლობით

$$\left(R_\xi h, h\right) = \mathrm{E}\,(h,\xi)^2, \qquad h \in H.$$

მტკიცდება, რომ R_ξ წარმოადგენს დადებით ($\left(R_\xi h, h\right) \geq 0$ ყოველი $h \in H$-სათვის), სიმეტრიულ ($\left(R_\xi h, g\right) = \left(R_\xi g, h\right)$ ყოველი $h, g \in H$-სათვის) და წრფივ უწყვეტ ოპერატორს, რომელიც H ჰილბერტის სივრცეს ასახავს თავის თავში. შევნიშნოთ, რომ შემთხვევითი ელემენტისათვის კოვარიაციული ოპერატორი წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის ანალოგს მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში. კოვარიაციული ოპერატორისათვის სამართლიანია შემდეგი ფაქტორიზაცია: თუ R კოვარიაციული ოპერატორია, მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი

სახით $R = A^*A$, სადაც $A : H \to H$ არის წრფივი უწყვეტი ოპე-რატორი და ეს წარმოდგენა ერთადერთია უნიტარული ოპერა-ტორის სიზუსტით, ანუ, თუ R-სთვის შესაძლებელია სხვა წარ-მოდგენაც $R = A_1^* A_1$, სადაც $A_1 : H \to H$ წრფივი უწყვეტი ოპერა-ტორია, მაშინ არსებობს ისეთი უნიტარული ოპერატორი $U : H \to H$, რომ $A_1 = UA$ (ოპერატორი $U : H \to H$ უნიტარულია, თუ მისი შეუღლებული ოპერატორი ემთხვევა მის შებრუნებულ ოპერატორს $U^* = U^{-1}$). A ოპერატორს უწოდებენ კვადრატულ ფესვს R კოვარიაციული ოპერატორიდან და მას ზოგჯერ $R^{1/2}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

წრფივ უწყვეტ ოპერატორს $T : H \to H$ ეწოდება ბირთვუ-ლი ოპერატორი, თუ $\sum_{k=1}^{\infty} |(T\varphi_k, \varphi_k)| < \infty$. სიდიდეს $\sum_{k=1}^{\infty} |(T\varphi_k, \varphi_k)|$, რო-მელიც არ არის დამოკიდებული (φ_k) ორთონორმირებული ბაზისის არჩევაზე, T ბირთვული ოპერატორის კვალს უწოდე-ბენ და $tr(T)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. თუ ξ არის ძლიერი მეო-რე რიგის მქონე შემთხვევითი ელემენტი ($\mathrm{E}\|\xi\|^2 < \infty$) და R_ξ არის მისი კოვარიაციული ოპერატორი, მაშინ მტკიცდება, რომ $\mathrm{E}\|\xi\|^2 = tr(R_\xi)$.

ვთქვათ, ξ და η სუსტი მეორე რიგის შემთხვევითი ელე-მენტებია მნიშვნელობებით სეპარაბელურ H ჰილბერტის სივ-რცეში. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ ისევ ვგულისხმობთ, რომ ისინი ცენტრირებული შემთხვევითი ელემენტებია (ე.ი. $\mathrm{E}\,\xi = \mathrm{E}\,\eta = 0$). მათი ურთიერთკორელაციის ოპერატორი $R_{\xi\eta}$ გა-ნისაზღვრება ტოლობით

$$\left(R_{\xi\eta}h, g\right) = \mathrm{E}\,(h, \xi)(g, \eta), \qquad h, g \in H\,.$$

ურთიერთკორელაციის ოპერატორი $R_{\xi\eta}$ წარმოადგენს წრფივ უწყვეტ ოპერატორს, რომელიც H ჰილბერტის სივრცეს ასახავს თავის თავში. შემთხვევითი ელემენტებისათვის ურთიერთკორელაციის ოპერატორი წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეთა კოვარიაციის ანალოგს მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში. მტკიცდება, რომ ურთიერთკორელაციის ოპერატორი ფაქტორიზდება შემდეგნაირად

$$R_{\xi\eta} = A_{\xi}^{*}V_{\xi\eta}A_{\eta}\,, \tag{2.1}$$

სადაც A_{ξ} და A_{η} არიან შესაბამისად ξ და η შემთხვევითი ელემენტების R_{ξ} და R_{η} კოვარიაციული ოპერატორების კვადრატული ფესვები და $V_{\xi\eta} : H \to H$ არის წრფივი უწყვეტი ოპერატორი, რომლისთვისაც $\left\|V_{\xi\eta}\right\| \le 1$.

(2.1) ტოლობით განსაზღვრულ $V_{\xi\eta}$ ოპერატორს ეწოდება კორელაციის კოეფიციენტი. მტკიცდება, რომ ისევე, როგორც ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, ზოგად შემთხვევაშიც კორელაციის კოეფიციენტი წარმოადგენს შემთხვევით ელემენტთა წრფივი დამოკიდებულების ზომას [9].

ჩვენ მიერ დამტკიცებული შემდეგი თეორემა წარმოადგენს სუსტად დამოკიდებული შემთხვევითი ელემენტებისათვის ხინჩინის თეორემის ანალოგს ჰილბერტის სივრცის შემთხვევაში.

თეორემა. *ვთქვათ მოცემულია ძლიერი მეორე რიგის მქონე შემთხვევით ელემენტთა* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *მიმდევრობა მნიშვნელობებით* H *ჰილბერტის სივრცეში. გარდა ამისა, ვთქვათ,* ξ_n -

ის მათემატიკური მოლოდინია 0, *ხოლო მისი კოვარიაციული ოპერატორი აღვნიშნოთ* R_n*-ით* $n = 1,2,\ldots$. *აგრეთვე ვთქვათ არსე-ბობს არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრუ-ლი არაუარყოფით მნიშვნელობებიანი ფუნქცია* c *ისეთი, რომ* ξ_n *და* ξ_m *შემთხვევითი ელემენტების კორელაციის* V_{nm} *კოეფი-ციენტისათვის სრულდება პირობა* $\|V_{nm}\| \le c(|n-m|)$, $n, m = 1,2,\ldots$. *მაშინ მიმდევრობა* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს, თუ*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} c(i) \cdot \sum_{i=1}^{n} tr(R_i)}{n^2} = 0. \tag{2.2}$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ (φ_k)-თი H ჰილბერტის სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი, R_i და R_j-თი – შესაბამისად ξ_i და ξ_j შემთხვევითი ელემენტების კოვარიაციული ოპერატორები და A_i და A_j-თი – კვადრატული ფესვები შესაბამისად R_i და R_j კოვარიაციული ოპერატორებიდან. თუ ყოველი i და j–სათვის გავითვალისწინებთ თანაფარდობებს

$R_{ij} = A_i^* V_{ij} A_j$,

$(R_{ij}\varphi_k, \varphi_k) = (V_{ij}A_j\varphi_k, A_i\varphi_k) \le \|V_{ij}\| \|A_i\varphi_k\| \|A_j\varphi_k\|$,

$tr(R_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (R_i\, \varphi_k, \varphi_k)$, სადაც $tr(R_i)$ აღნიშნავს R_i ბირთვული ოპე-რატორის კვალს, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\mathrm{E}\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \;/\; n \right\|^2 \le \frac{1}{n^2}\, \mathrm{E}\left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\varphi_k, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{E}\,(\varphi_k,\xi_i)(\varphi_k,\xi_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ij}\varphi_k,\varphi_k) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}(A_i^* V_{ij}A_j\varphi_k,\varphi_k) \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\|V_{ij}\|\|A_i\varphi_k\|\|A_j\varphi_k\| \le$$

$$\le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}c(i)\cdot\sum_{i=1}^{n}(R_i\ \varphi_k,\varphi_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}c(i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(R_i\ \varphi_k,\varphi_k)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}c(i)\cdot\sum_{i=1}^{n}tr(R_i)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ჩებიშევის უტოლობას, რომლის ძალითაც $\mathrm{P}\left[\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ /\ n\right\| > \varepsilon\right] \le \frac{\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ /\ n\right\|^2}{\varepsilon^2}$, ცხადია, ყოველი $\varepsilon > 0$-სათვის შესრულებული იქნება

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\left[\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ /\ n\right\| > \varepsilon\right] = 0 .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. *თუ სრულდება პირობა*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}tr(R_i)}{n} = 0, \tag{2.3}$$

მაშინ მიმდევრობა $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს.

დამტკიცება. მართლაც, რადგანაც კორელაციის კოეფიციენტი აკმაყოფილებს პირობას $\|V_{nm}\| \le 1$, ამიტომ c ფუნქციად შე-

საძლებელია ავიღოთ მუდმივი ფუნქცია $c(k) \equiv 1$ ყოველი $k = 0,1,\ldots$-სათვის. ამის გათვალისწინებით (2.2)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს პირობა (2.3).

ლიტერატურა

1. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее применение. Т. 1. М., Мир, 1984
2. М. Лоэв. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962
3. А.Н. Ширяев. Вероятность – 2. М., МЦНМО, 2004
4. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961
5. Дж. Ламперти. Вероятность. М., Наука,1973
6. А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров. Введение в теорию вероятностей. М., Наука, 1982
7. Г.П. Климов. Теория вероятностей и математическая статистика. М., МГУ, 1983
8. N. Vakhania, V. Tarieladze, S. Chobanyan. Probability distributions on Banach Spaces. Dordrecht etc.: D. Reidel Publishing Company, 482 p., 1987.
9. V. Kvaratskhelia. The analogue of the coefficient of correlation in Banach spaces. Bull. Georgian Acad. Sci., 161, 3, 2000, 377-379.