ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ნინო ბრეგვაძე

(მე–4 სემესტრის სტუდენტი)

პროექტი: ოპტიმალური მართვის წრფივი ამოცანები

ხელმძღვანელი: პროფ. თ. თადუმაძე

თბილისი– 2014

შინაარსი

გვ.

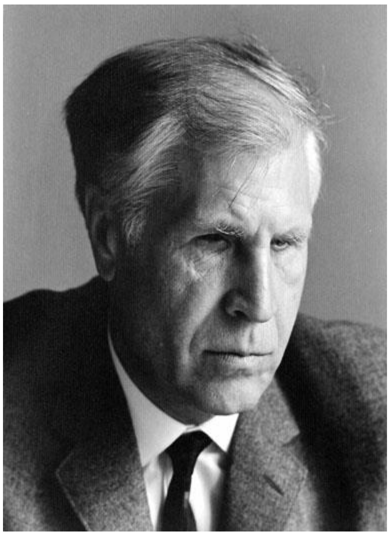
შესავალი

1. წრფივი სამართი სისტემა და მისი ამონახსნი 5
2. ოპტიმალური ამოცანა სწრაფქმედების აზრით. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები 7
3. თეორემები ოპტიმალური მართვის არსებობისა და სტრუქტურის შესახებ 9
4. თეორემა 2.1 დამტკიცება 11
5. ოპტიმალური ამოცანის მაგალითები და მისი ამონახსნები. 15

ლიტერატურა 26

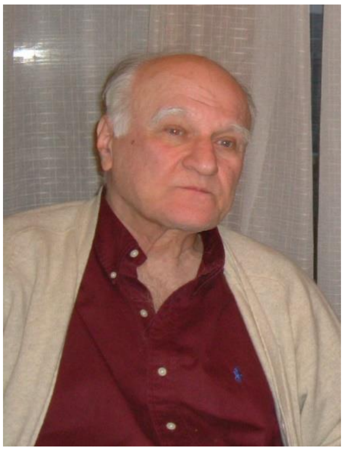
შესავალი

ოპტიმალური მართვის მათემატიკური თეორია შეიქმნა მეოცე საუკუნის 60-იან წლებში. მას საფუძვლად დაედო პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი- მართვის ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობა. ეს პრინციპი არაწრფივი ოპტიმალური ამოცანებისათვის, როგორც ჰიპოტეზა, გამოთქმული იყო გენიალური რუსი მათემატიკოსის ლევ პონტრიაგინის მიერ.



ლევ პონტრიაგინი
1908-1988

წრფივი ოპტიმალური ამოცანებისათვის ეს ჰიპოთეზა დამტკიცებული იქნა ლ. პონტრიაგინის მოწაფის, გამოჩენილი ქართველი მათემატიკოსის-რევაზ გამყრელიძის მიერ. ოპტიმალური მართვის წრფივ თეორიას ამჟამად გამყრელიძის თეორიას უწოდებენ.



რევაზ გამყრელიძე
1927-

პროექტში განხილულია წრფივი ოპტიმალური ამოცანა დროის მინიმიზაციის თვალსაზრისით (სწრაფქმედების ამოცანა) . ნაშრომში მოყვანილია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები: ოპტიმალური მართვისთვის წერტილოვანი მაქსიმუმის პრინციპის ფორმით, ხოლო ოპტიმალური საბოლოო მომენტისთვის უტოლობის სახით. გარდა ამისა

მოყვანილია თეორემები ოპტიმალური მართვის არსებობისა და სტრუქტურის შესახებ. **ნაშრომის ძირითადი თეორემა 2.1 დამტკიცებულია მე-4 პუნქტში.** დასასრულს, საილუსტრაციოდ განხილულია ამოცანები ორგანზომილებიანი სივრცის მოცემულ წერტილიდან კოორდინატთა სათავეში მინიმალურ დროში გადასვლის შესახებ. კონკრეტული საწყისი წერტილისათვის **(განხილულია ოთხი შემთხვევა)** აგებულია ოპტიმალური მართვა და ტრაექტორია, გამოთვლილია სათავეში გადასვლის ოპტიმალური დრო. ტრაექტორიის აგება და გათვლები ჩატარებულია mathematica-9-ს გამოყენებით. პროექტზე მუშაობისას ჩვენ ვსარგებლობდით [1-4] წყაროებით.

1. წრფივი სამართი სისტემა და მისი ამონახსნი

R_x^n – ით აღვნიშნავთ $x=(x^1,\dots,x^n)'$ ვექტორების n – განზომილებიან წრფივ სივრცეს, სადაც შტრიხი ნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას. R_x^n – ში ვექტორის სიგრძე და სკალარული ნამრავლი განიმარტება შემდეგნაირად:

$$|x|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right)^{1/2},\ x'y=\sum_{i=1}^{n}x^iy^i.$$

ვთქვათ, U არის ამოზნექილი კომპაქტური სიმრავლე . კერძო შემთხვევაში U შეიძლება იყოს r – განზომილებიანი პარალელეპიპედი

$$U=\{u\in R_u^r : a_i\le u^i\le b_i, i=1,\dots,r\},$$

სადაც a_i, b_i მოცემული რიცხვებია.

Ω – თი აღვნიშნოთ უბან–უბან უწყვეტი $u(t), t\in I=[t_0,T]$ ფუნქციების სიმრავლე, რომელთაც აქვთ სასრული რაოდენობა პირველი გვარის წყვეტის წერტილები და იღებენ მნიშვნელობებს U სიმრავლიდან. $u(t)$ -ს ეწოდება მართვა (მართვის ფუნქცია).

R_x^n – ში განვიხილოთ მართვის $u\in U$ პარამეტრზე დამოკიდებული წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\dot x=A(t)x+B(t)u+f(t), x\in R_x^n, t\in I \tag{1.1}$$

სადაც $A(t)$ და $B(t)$ არის უწყვეტი მატრიც–ფუნქციები განზომილებით $n\times n$ და $n\times r$,ხოლო $f(t)$ არის უწყვეტი სვეტვექტორ–ფუნქცია.

(1.1)–ს ეწოდება სამართი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. ვთქვათ, $u(t)\in\Omega$, განვიხილოთ კოშის ამოცანა :

$$\begin{cases}\dot x=A(t)x+B(t)u(t)+f(t), t\in I,\\ x(t_0)=x_0,\end{cases} \tag{1.2}$$

სადაც $x_0\in R_x^n$ ფიქსირებული წერტილია. შემოვიღოთ კოშის ამოცანის ამონახსნი. ვთქვათ, $\theta_1>t_0$ არის $u(t)$ ფუნქციის პირველი წყვეტის წერტილი. $[t_0,\theta_1]$ ინტერვალზე დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარე უწყვეტია , ამიტომ (1.2) კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x_1(t), t\in[t_0,\theta_1]$,[1,2]. ვთქვათ $\theta_1>\theta_2$ არის $u(t)$ ფუნქციის შემდეგი წყვეტის წერტილი . $[\theta_1,\theta_2]$ ინტერვალზე განვიხილოთ კოშის ამოცანა:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + f(t),$$
$$x(\theta_1) = x_1(\theta_1).$$

ამ ამოცანასაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x_2(t), t \in [\theta_1, \theta_2]$. (1.2) ამოცანის ამონახსნი $[t_0, \theta_2]$ ინტერვალზე ვუწოდოთ ფუნქციას:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t),\ t \in [t_0, \theta_1), \\ x_2(t), t \in [\theta_1, \theta_2]. \end{cases}$$

შევნიშნავთ, რომ $x(t), t \in (t_0, \theta_2)$ ფუნქციას საზოგადოდ θ_1 წერტილში შეიძლება წარმოებული არ გააჩნდეს. აქედან გამომდინარე იგი განტოლებას ამ წერტილში არ დააკმაყოფილებს. თუ პროცესს ანალოგიურად გავაგრძელებთ, მაშინ ჩვენ ავაგებთ $u(t)$ მართვის შესაბამის ამონახსნს მთელ (t_0, T) ინტერვალზე.

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ , რომ $u(t) = u(t-), t \in (t_0, T], u(t_0) = u(t_0+)$. ამრიგად $u(t)$ მართვა მარცხნიდან უწყვეტია $(t_0, T]$ ინტერვალზე , ხოლო t_0 წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან. ამ შემთხვევაში t_0 და T წერტილებში შესრულებულია ტოლობები:

$$\dot{x}(t_0+) = A(t_0)x(t_0) + B(t_0)u(t_0+) + f(t_0),$$
$$\dot{x}(T-) = A(T)x(T) + B(T)u(T-) + f(T).$$

განსაზღვრება 1.1. $x(t), t \in I$ ფუნქციას ეწოდება (1.2) ამოცანის ამონახსნი, თუ იგი უწყვეტია და უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადია და აკმაყოფილებს საწყის პირობას, ხოლო განტოლებას ყველგან, გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

თეორემა 1.1. (1.2) კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია I -ზე.

სამართი სისტემის მაგალითი. ვთქვათ რიცხვით ღერძზე $F, |F| \le 1$ ძალის მოქმედებით მოძრაობს m მასის სხეული . ვიპოვოთ სხეულის მოძრაობის აღმწერი განტოლება. ვიგულისხმოთ, რომ გარეშე ფაქტორები უგულველყოფილია. ვთქვათ, $x(t)$ ფუნქცია აღწერს სხეულის მოძრაობის კანონს, მაშინ ნიუტონის მე-2 კანონის თანახმად გვექნება განტოლება:

$$m\ddot{x} = F.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები $x^1 = x, x^2 = \dot{x}$ მაშინ მე-2 რიგის განტოლება იქნება შემდეგი სამართი სისტემის ეკვივალენტური:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = F, \end{cases}$$

აქ F შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სამართი პარამეტრი.

2. ოპტიმალური ამოცანა სწრაფქმედების აზრით. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები

$t_1 \in (t_0, T]$ -ით აღვნიშნავთ საბოლოო მომენტს. საბოლოო t_1 მომენტისა და მართვის $u(t)$ ფუნქციის ერთობლიობას ვუწოდებთ ელემენტს და აღვნიშნავთ სიმბოლოთი $w = (t_1, u)$. ყოველ. $w = (t_1, u) \in W = (t_0, T] \times \Omega$ ელემენტს R_x^n სივრცეში შევუსაბამოთ წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + f(t), \tag{2.1}$$

საწყისი პირობით:

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.2}$$

(2.1) –(2.2) ამოცანის ამონახსნს ვუწოდებთ w ელემენტის შესაბამის ამონახსნს და მას აღვნიშნავთ $x(t) = x(t; w)$. თეორემა 1.1 ძალით ყოველ $w = (t_1, u) \in W$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრულია $[t_0, t_1]$ მონაკვეთზე.

განსაზღვრება 2.1. $w = (t_1, u) \in W$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ მისი შესაბამისი ამონახსნი $x(t) = x(t; w)$ აკმაყოფილებს პირობას:

$$x(t_1) = x_1, \tag{2.3}$$

სადაც $x_1 \in R_x^n$ მოცემული წერტილია.

დასაშვებ ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ W_0. თუ $w = (t_1, u) \in W_0$, მაშინ ვიტყვით , რომ $u(t)$ მართვას x_0 წერტილი გადაყავს x_1 წერტილში $t_1 - t_0$ დროში .

განსაზღვრება 2.2. $w_0 = (t_{10}, u_0) \in W_0$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური , თუ ნებისმიერი $w = (t_1, u) \in W_0$ ელმენტისთვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$t_{10} \le t_1 \ \left(t_{10} - t_0 \le t_1 - t_0\right). \tag{2.4}$$

ამრიგად, თუ $w_0 = (t_{10}, u_0)$ ოპტიმალური ელემენტია, მაშინ $u_0(t)$ მართვას x_0 წერტილი გადაყავს x_1 წერტილში მინიმალურ დროში. ამ შემთხვევაში $u_0(t)$–ს ეწოდება ოპტიმალური მართვა, t_{10}-ს ოპტიმალური საბოლოო მომენტი, $x_0(t) = x(t; w_0)$ -ს ოპტიმალური ტრექტორია.

(2.1)-(2.4) ამოცანას ეწოდება ოპტიმალური ამოცანა სწრაფქმედების აზრით, იგი მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t),\ t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \\ t_1 - t_0 \to \min, \\ (t_1, u) \in (t_0, t_1] \times \Omega. \end{cases}$$

ქვემოთ მოყვანილი თეორემა იძლევა ოპტიმალური ელემენტის მოძებნის საშუალებას, იგი პირველად დამტკიცებული იყო რ. გამყრელიძის მიერ [3,4].

თეორემა 2.1. ვთქვათ $w_0 = (t_{10}, u_0)$ ოპტიმალური ელემენტია, მაშინ არსებობს განტოლების

$$\dot{\psi} = -\psi\, A(t),\ \psi = (\psi_1, ..., \psi_n) \tag{2.5}$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\psi(t)$, რომ ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს :

2.1) $u_0(t)$ მართვის ოპტიმალურობის პირობა (მაქსიმუმის პრინციპი)

$$\psi(t)B(t)u_0(t) = \max_{u\in U} \psi(t)B(t)u \tag{2.6}$$

ყოველი $t \in [t_0, t_{10}]$.

2.2) t_{10} საბოლოო მომენტის ოპტიმალურობის პირობა

$$\psi(t_{10})\left[A(t_{10})x_1 + B(t_{10})u_0(t_{10}) + f(t_{10})\right] \geq 0 \quad . \tag{2.7}$$

ზოგიერთი კომენტარი. (2.5) განტოლება ერთგვაროვანია , ამიტომ მისი ამონახსნი თუ ერთ წერტილში ნულია, მაშინ ერთადერთობის გამო იგი ყველგან ნული იქნება.თუ $\psi(t) \equiv 0,$ მაშინ (2.6) პირობა აზრს მოკლებულია, რამეთუ იგი ყველა მართვისთვის სრულდება. (2.6) პირობის შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: მრავალი ცვლადის სკალარული ფუნქცია $\psi(t)B(t)u$ ყოველი ფიქსირებული $t \in [t_0, t_{10}]$ აღწევს თავის მაქსიმუმს წერტილში $u_0(t)$. ვთქვათ, $f(t) \equiv 0$, $x_1 = 0$ და $0 \in U$, მაშინ (2.7) პირობა მიიღებს სახეს:

$$\psi(t_{10})B(t_{10})u_0(t_{10}) \geq 0 \tag{2.8}$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს უკანასკნელი ყოველთვის სრულდება , მართლაც , (2.6) პირობიდან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$\psi(t)B(t)u_0(t) \geq 0, t \in [t_0, t_{10}].$$

აქედან ცხადიამიიღება (2.8) უტოლობა.
(2.6) და (2.7) პირობები წარმოადგენენ ოპტიმალურობის აუცილებელ პირობებს.

3. თეორემები ოპტიმალური მართვის არსებობისა და სტრუქტურის შესახებ

R_u^r სივრცეში განვიხილოთ r განზომილებიანი მრავალწახნაგა (პარალელეპიპედი)

$$U = \left\{\ u = (u^1, ..., u^r)' \in R_u^r : a_i \leq u^i \leq b_i\ \right\}.$$

თუ $r=1$ მივიღებთ მონაკვეთს, მას ეწოდება ერთგანზომილებიანი მრავალწახნაგა (წიბო). წერტილი არის ნულგანზომილებიანი მრავალწახნაგა. მონაკვეთის შემთხვევაში ნულგანზომილებიანი მრავალწახნაგა (წახნაგი) არის მონაკვეთის ბოლო წერტილები.

ვთქვათ, $r=2$ მაშინ წიბო-ერთგანზომილებიანი მრავალწახნაგა იქნება მისი გვერდები, ხოლო ნულგანზომილებიანი მრავალწახნაგა იქნება წვეროები. $r=3$ შემთხვევაში გვერდითი წახნაგები არის ორგანზომილებიანი მრავალწახნაგები და ა.შ.

R_x^n სივრცეში განვიხილოთ მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი სამართი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (3.1)$$

განსაზღვრება 3.1. ვიტყვით, რომ (3.1) სისტემა აკმაყოფილებს ზოგადი მდგომარეობის პირობას თუ U -ს ყოველი წიბოს პარარელული h ვექტორისთვის ვექტორთა სისტემა

$$Bh,\ ABh\ ,...,\ A^{n-1}Bh$$

არის წრფივად დამოუკიდებელი.

წრფივად დამოუკიდებლობა ნიშნავს, რომ

$$\det(Bh\ ABh\ ...\ A^{n-1}Bh) \neq 0.$$

ვაჩვენოთ, რომ სამართი სისტემა

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 = 0x^1 + x^2 + 0u^1 + 0u^2, \\ \dot{x}^2 = u^2 = 0x^1 + 0x^2 + 0u^1 + u^2 \end{cases}$$

სადაც

$$u \in U = \left\{ u = (u^1, u^2)' \in R_u^2 : u^1 = 0, -1 \le u^2 \le 1 \right\}$$

აკმაყოფილებს ზოგადი მდგომარეობის პირობას. მართლაც, ამ შემთხვევაში $n=2$ და $r=2$. ვიპოვოთ A და B მატრიცები, ადვილი მისახვედრია, რომ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

U -ს წიბო ეკუთვნის $0u^2$ ღერძს, ამიტომ მისი პარალელური ვექტორია $h = \begin{pmatrix} 0 \\ h^2 \end{pmatrix}$, $h^2 \neq 0.$

გვექნება

$$Bh = \begin{pmatrix} 0 \\ h^2 \end{pmatrix}\ ABh = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ვექტორები

$$\begin{pmatrix} 0 \\ h^2 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad \begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

წრფივად დამოუკიდებელია.

განვიხილოთ ამოცანა, სადაც $0 \in U$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \, u \in U, \\ x(0) = x_0, \, x(t_1) = 0 \\ t_1 \to \min. \end{cases} \tag{3.2}$$

თეორემა 3.1. ვთქვათ $0 \in U$ და არსებობს დასაშვები ელემენტი $(t_1, u(\cdot))$, მაშინ არსებობს ოპტიმალური ელემენტი $(t_{10}, u_0(\cdot))$ ე.ი. Ω სიმრავლეში არსებობს ოპტიმალური მართვა $u_0(t)$.

თეორემა 3.2. ვთქვათ, შესრულებულია პირობები: $0 \in U$ და სამართი სისტემა აკმაყოფილებს ზოგადი მდგომარეობის პირობას; გარდა ამისა , A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ნამდვილია, მაშინ ოპტიმალური $u_0(t)$ მართვის i - ური კოორდინატი $u_0^i(t)$ არის უბან-უბან მუდმივი ფუნქცია, იგი იღებს მნიშნელობებს a_i ან b_i და აქვს არა უმეტეს $n-1$ რაოდენობა გადართვის წერტილები.

ვაჩვენოთ, რომ განხილულ მაგალითში A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ნამდვილია. მართლაც

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \, , \lambda = \pm 1.$$

4. თეორემა 2.1 დამტკიცება

თეორემა 2.1 დამტკიცდებული იქნება შემთხვევისთვის , როცა: $f(t) = 0, \; x_1 = 0$; $U \subset R_u^r$ არის ამოზნექილი კომპაქტი, რომელიც კოორდინატთა სათავეს შეიცავს როგორც შიგა წერტილს. ასეთ შემთხვევაში თეორემა 2.1–ის 2.2) პირობა ავტომატურად სრულდება ე.ი. საჭიროა დავამტკიცოთ მხოლოდ 2.1) პირობა შემდეგი ამოცანისთვის

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \, t \in [t_0, t_1],$$
$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = 0,$$
$$t_1 - t_0 \to \min.$$

4.1.მიღწევადობის სფერო და მისი თვისებები. ვთქვათ $t_1 \in (t_0, b]$, V_{t_1} -თი აღვნიშნოთ R_x^n სივრცეში ისეთი x_0 წერტილების სიმრავლე, რომლისგან კოორდინატთა სათავეში გადასვლა შეიძლება $t_1 - t_0$-ზე ნაკლებ ან $t_1 - t_0$–ს ტოლ დროში. V_{t_1} -ს ეწოდება მიღწევადობის სფერო.

ლემა 4.1. მიღწევადობის სფერო ამოზნექილია.

დამტკიცება. ვთქვათ $\hat{x}_0 \in V_{t_1}$. არსებობს $t_0 < t_2 \le t_1$ და მართვა $\hat{u}(\cdot) \in \Omega$ ისეთი, რომ $\hat{x}(t_2) = 0$, სადაც $\hat{x}(t)$ არის $\hat{u}(t)$–ს შესაბამისი ამონახსნი. ვთქვათ $t_2 < t_1$. შემოვიღოთ ახალი მართვა

$$\hat{u}_1(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), \ t \in [t_0, t_2), \\ 0, \quad t \in [t_2, t_1]. \end{cases}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $\hat{u}_1(t)$–ს შესაბამისი ამონახსნი იქნება

$$\hat{x}_1(t) = \begin{cases} \hat{x}(t), \ t \in [t_0, t_2], \\ 0, \quad t \in \{t_2, t_1]. \end{cases}$$

ამრიგად ნებისმიერი $x_0 \in V_{t_1}$ წერტილისათვის ყოველთვის არსებობს $u(t), t \in [t_0, t_1]$ მართვა Ω სიმრავლიდან, ისეთი რომ მისი შესაბამისი ამონახსნი აკმაყოფილებს პირობებს $x(t_0) = x_0, x(t_1) = 0.$ ვთქვათ $y_1, y_2 \in V_{t_1}$ ნებისმიერი წერტილებია. Ω სიმრავლეში არსებობს ისეთი მართვები $v_1(t)$ და $v_2(t)$, რომ შესაბამისი ამონახსნები აკმაყოფილებენ პირობებს

$$y_1(t_0) = y_1, y_2(t_0) = y_2; \ y_1(t_1) = y_2(t_1) = 0.$$

შემოვიღოთ ფუნქციები

$$v_\lambda(t) = \lambda y_1(t) + (1-\lambda) y_2(t) \ ,$$
$$y_\lambda(t) = \lambda y_1(t) + (1-\lambda) y_2(t), \ \lambda \in [0,1].$$

ცხადია, რომ $v_\lambda(t) \in U, t \in [0,T]$ ე.ი. $v_\lambda(\cdot) \in \Omega$, ხოლო $y_\lambda(t)$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$y_\lambda(t_0) = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2, \ y_\lambda(t_1) = 0.$$

განტოლების წრფივობის გამო ამონახსნი $y_\lambda(t)$ შეესაბამება $v_\lambda(t)$. უკანასკნელი ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in V_{t_1}$ ე.ი. მიღწევადობის სფერო ამოზნექილია.

ლემა 4.2. თუ x_0 არის V_{t_1}–ს შიგა წერტილი, მაშინ x_0–დან სათავეში შეიძლება გადავიდეთ $t_1 - t_0$–ზე ნაკლებ დროში.

ლემა 4.3.ვთქვათ $V \subset R_x^n$ ამოზნექილი სიმრავლეა, ხოლო x_0 მისი საზღვრითი წერტილი. მაშინ არსებობს ისეთი არანულოვანი n განზომილებიანი სტრიქონ ვექტორი π რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\pi(x - x_0) \geq 0,\ \forall x \in V.$$

თეორემა 2.1–ის 2.1) პირობის გამოყვანა. ვთქვათ $(t_{01}, u_0(\cdot))$ ოპტიმალური ელემენტია. ლემა 4.2–ის ძალით x_0 იქნება $V_{t_{10}}$ სიმრავლის საზღვრითი წერტილი. ლემა 4.3–ის თანახმად ადგილი ექნება უტოლობას

$$\pi(x - x_0) \geq 0,\ \forall x \in V_{t_{10}}. \tag{4.1}$$

ნებისმიერი $u(\cdot) \in \Omega$ ყოველთვის არსებობს $x(u) \in V_{t_{10}}$ ისეთი, რომ $u(\cdot)$ შესაბამისი ამონახსნი $x(t), t \in [t_0, t_{10}]$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$x(t_0) = x(u), x(t_{10}) = 0.$$

კოშის ფორმულის თანახმად (ტოლობა ამონახსნის ინტეგრალური ფორმით წარმოდგენის შესახებ) გვექნება

$$x(t_{10}) = \Phi(t_{10})[x(u) + \int_{t_0}^{t_{10}} \Phi^{-1}(s)B(s)u(s)ds] = 0,\ \Phi(t_{10}) = E\ ,\ (4.2)$$

სადაც E არის ერთეულოვანი მატრიცა, ხოლო $\Phi(t)$ არის ფუნდამენტური მატრიცა, იგი აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

შებრუნებული მატრიცა $\Phi^{-1}(t)$ ყოველთვის არსებობს და აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Phi}^{-1}(t) = -\Phi^{-1}(t)A(t). \tag{4.3}$$

(4.2)–ის გათვალისწინებით გვექნება

$$x(u) = -\int_{t_0}^{t_{10}} \Phi^{-1}(t)B(t)u(t)dt]\ ,\quad x_0 = -\int_{t_0}^{t_{10}} \Phi^{-1}(t)B(t)u_0(t)dt.$$

(4.1)–დან მივიღებთ

$$\pi(x(u) - x_0) \geq 0,\ \forall u \in \Omega.$$

ამრიგად, მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t_{10}} \pi\Phi^{-1}(t)B(t)[u_0(t)-u(t)]dt \geq 0, \forall u(\cdot) \in \Omega. \qquad (4.4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\psi(t) = \pi\Phi^{-1}(t)\,. \qquad (4.5)$$

$\psi(t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)A(t)\,.$$

(4.4)–დან (4.5)–ის გათვალისწინებით მივიღებ ინტეგრალურ მაქსიმუმის პრინციპს

$$\int_{t_0}^{t_{10}} \psi(t)B(t)u_0(t)dt \geq \int_{t_0}^{t_{10}} \psi(t)B(t)u(t)dt, \forall u(\cdot) \in \Omega.. \qquad (4.6)$$

ვთქვათ $s \in (t_0, t_{10})$ არის $u_0(t)$ მართვის ნებისმიერი ფიქსირებული უწყვეტობის წერტილი, არსებობს მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset (t_0, t_{10})$ და ინტერვალზე ეს მართვა უწყვეტია. შემოვიღოთ მართვა

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u, t \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon), \\ u_{10}(t), t \notin [t_0, t_{10}] \setminus (s-\varepsilon, s+\varepsilon), \end{cases}$$

სადაც $u \in U$ ნებისმიერი ფიქსირებული სამართი პარამეტრია. ცხადია $u_\varepsilon(\cdot) \in \Omega$ ამოტომ (4.6)–დან მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t_{10}} \psi(t)B(t)u_0(t)dt \geq \int_{t_0}^{t_{10}} \psi(t)B(t)u_\varepsilon(t)dt.$$

ამრიგად

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \psi(t)B(t)u_0(t)dt \geq \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \psi(t)B(t)u\,dt.$$

ელემენტარული გარდაქმით მივიღებთ

$$2\psi(s)B(s)u_0(s)\varepsilon + \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}[\psi(t)B(t)u_0(t)-\psi(s)B(s)u_0(s)]dt$$

$$\leq 2\psi(s)B(s)u\varepsilon + \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}[\psi(t)B(t)u_0(t)-\psi(s)B(s)u]dt.$$

უტოლობის ორივე მხარე გავყოთ $2\varepsilon-$ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\varepsilon \to 0$, მივიღებთ

$$\psi(s)B(s)u_0(s) \geq \psi(s)B(s)u.$$

ამრიგად 1.2) მაქსიმუმის პრინციპი სამართლიანია $u_0(t)$ მართვის უწყვეტობის წერტილებისთვის. მოვითხოვოთ, რომ $u_0(t_0)=u_0(t_0+), u_0(t_{10})=u(t_{10}-)$ და $u_0(t)$ შიგა წერტილებში უწრვეტია მარცხნიდან (ეს გარემოება არ მოქმედებს ოპტიმალურ ტრაექტორიაზე და დროზე), მაშინ მაქსიმუმის პრინციპი სამართლიანია წყვეტის წერტილებშიც. მართლაც, ვთქვათ $\theta \in (t_0, t_{10})$ წყვეტის წერტილია. არსებობს მიმდევრობა $\{\theta_k\}$ ოპტიმალური მართვის უწყვეტობის წერტილებისა, რომელიც კრებადია $\theta-$კენ. გვაქვს

$$\psi(\theta_k)B(\theta_k)u_0(\theta_k) \geq \psi(\theta_k)B(\theta_k)u.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, მივიღებთ

$$\psi(\theta)B(\theta)u_0(\theta) \geq \psi(\theta)B(\theta)u.$$

2.1) პირობის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

5. ოპტიმალური ამოცანის მაგალითები და მისი ამონახსნები

1. განვიხილოთ შემდეგი ოპტიმალური ამოცანა:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = u, \end{cases}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = 0,$$

$$t_1 \to \min,$$

სადაც $n=2,\ x=(x^1,x^2)'\ U=[-1,1], r=1,\ x_0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ და $x_1=0.$

.

ამ შემთხვევისთვის A და B მატრიცებს ექნება სახე

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

იხ. განტოლება (3.2). ამ კომკრეტულ შემთხვევაში $\dot{\psi}=-\psi A$ განტოლება მიიღებს სახეს

$$(\dot\psi_1,\dot\psi_2)=-(\psi_1,\psi_2)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\dot\psi_1=0\\\dot\psi_2=-\psi_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\psi_1=c_1\\\psi_2=-c_1t+c_2\end{cases}$$

ხოლო მაქსიმუმის პრინციპს ექნება სახე

$$(c_1,-c_1t+c_2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u_0(t)=\max_{u\in[-1,1]}(c_1,-c_1t+c_2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u\ \Rightarrow$$

$$(-c_1t+c_2)u_0(t)=\max_{u\in[-1,1]}(-c_1t+c_2)u$$

ფუნქცია $-c_1t+c_2$ ან ზრდადია, ან კლებადი, ან მუდმივი. შესაბამისად, მაქსიმუმის პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ $u_0(t)$ ოპტიმალური მართვა იქნება უბან–უბან მუდმივი ან მუდმივი. იგი მიიღებს მნიშვნელობებს სიმრავლიდან $\{-1,1\}$.

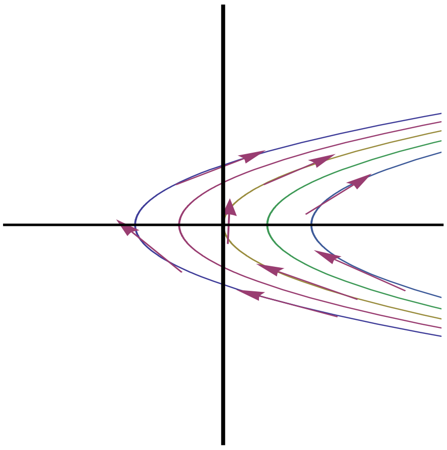
ვიპოვოთ $u=-1$ და $u=1$ მართვების შესაბამისი ტრაექტორიები:

1) ვთქვათ u=1 მაშინ სისტემის ამონახსნი იქნება

$$\begin{cases}\dot x^1=x^2\\\dot x^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx^1}{dt}=x^2\\[2mm]\dfrac{dx^2}{dt}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{dx^1}{dx^2}=x^2\Rightarrow \quad (1),$$

$$\int dx^1=\int x^2dx^2\Rightarrow x^1=(x^2)^2/2+c_1$$

პარაბოლების ოჯახი, რომელთა გრაფიკი მოცემულია ქვემოთ შესაბამისი მიმართულებით

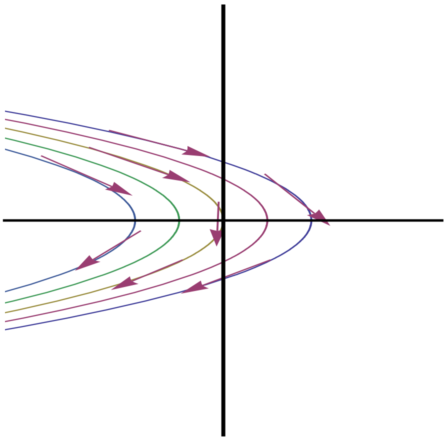


2) ვთქვათ $u=-1$ მაშინ სისტემის ამონახსნი იქნება

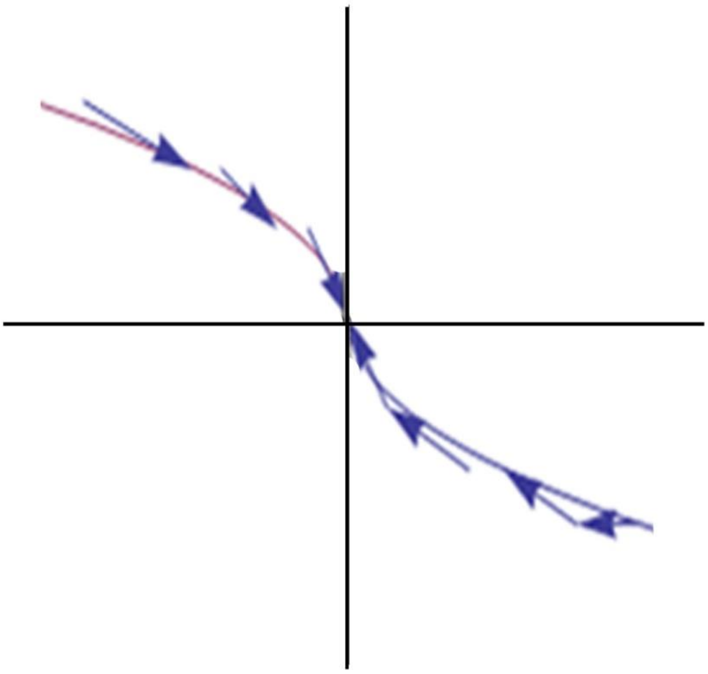
$$\begin{cases}\dot{x}^1=x^2\\ \dot{x}^2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx^1}{dt}=x^2\\ \dfrac{dx^2}{dt}=-1\end{cases}\Rightarrow\frac{dx^1}{dx^2}=-x^2\Rightarrow \qquad (2)$$

$$\int dx^1=-\int x^2dx^2\Rightarrow x^1=-(x^2)^2/2+c_1$$

პარაბოლების ოჯახი, რომელთა გრაფიკი მოცემულია ქვემოთ შესაბამისი მიმართულებით

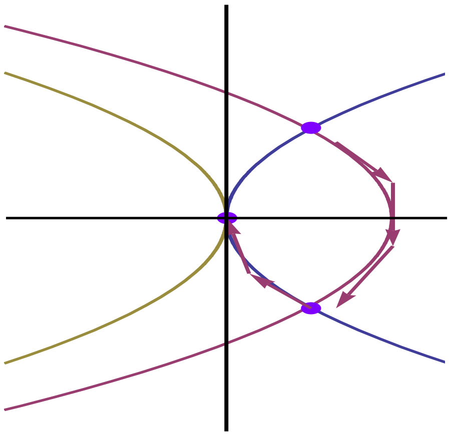


ამოცანის თანახმად წერტილი უნდა გადავიდეს სათავეში, ამიტომ ჩვენთვის სასურველია გამოვყოთ პარაბოლას ის შტოები , რომლებიც წერტილს გადაიყვანს სათავეში. ასეთი წირი მოცემლია ქვემოთ,მას გადართვის წირი ეწოდება



განხილული ამოცანისთვის შესრულებულია 3.1 და 3.2 თეორემების პირობები (იხ. პარაგრაფი 3) ე.ი. მაქსიმუმის პრინციპიდან ნაპოვნი მართვა, რომელსაც გადაყავს წერტილი სათავეში იქნება ოპტიმალური.

სქემატურად ოპტიმალური $x_0(t)$ ტრაექტორია მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე,



ხოლო $u_0(t)$ ოპტიმალურ მართვას ექნება სახე

$$u_0(t)=\begin{cases}-1,\ t\in[0,\theta],\\ +1, t\in(\theta,t_{10}],\end{cases}$$

სადაც θ არის გადართვის წირზე მოხვედრის მომენტი (გადართვის მომენტი); t_{10} არის ოპტიმალური დრო.

ახლა ჩვენ უნდა დავთვალოთ ოპტიმალურ ტრაექტორიაზე მოძრაობის ოპტიმალური დრო t_{10}, რაც ტოლი იქნება საწყისი x_0 წერტილიდან გადართვის წირზე მოხვედრის დროისა და ამ წერტილიდან სათავეში გადასვლაზე დახარჯული დროის ჯამის. ოპტიმალური მართვის სტრუქტურიდან ჩანს, რომ წერტილი ჯერ მოძრაობს $u=-1$ მართვის შესაბამის ტრაექტორიაზე, ხოლო გადართვის შემდეგ $u=+1$ მართვის შესაბამის ტრაექტორიაზე.

x_0 წერტილიდან გამომავალი პარაბოლას განტოლება იქნება

$$x^1 = -\frac{(x^2)^2}{2} + 3,$$

ხოლო გადართვის წირთან გადაკვეთის წერტილი იქნება

$$\begin{pmatrix} 3/2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

ახლა დავთვალოთ დრო, რომელიც საჭიროა x_0- დან გადართვის წირამდე მოსახვედრად. ეს პროცედურა აღწერილია ქვემოთ

ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = -1 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი საწყისი პირობით $x^1(0)=1, x^2(0)=2.$ ეს ამონახსნი იქნება

$$x^2(t) = -t+2, \;\; x^1(t) = -t^2/2 + 2t + 1.$$

აქედან დავადგენთ გადართვის დროს θ–ს , რომელიც ტოლია $\sqrt{3}+2.$

ახლა ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = 1 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი საწყისი პირობით $x^1(0)=0, x^2(0)=0.$ ეს ამონახსნი იქნება

$$x^2(t) = t, \;\; x^1(t) = t^2/2.$$

ცხადია, რომ $s=-\sqrt{3}$ –თვის შესრულდება პირობა

$$x^1(s) = 3/2, \quad x^2(s) = -\sqrt{3}.$$

აქედან დავასკვნით, რომ გადართვის წერტლიდან სათავეში მოხვედრის დრო ა $\sqrt{3}.$

ამრიგად ოპტიმალური დრო იქნება

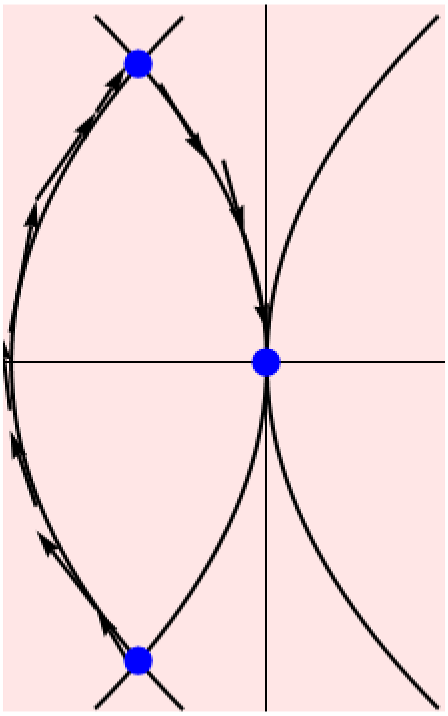
$$t_{10} = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}.$$

2. განვიხილოთ შემთხვევა როცა

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

.

სქემატურად ოპტიმალური $x_0(t)$ ტრაექტორია მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე,



როგორც წინა ამოცანაში $u_0(t)$ ოპტიმალურ მართვას ექნება სახე

$$u_0(t) = \begin{cases} -1, \ t \in [0, \theta], \\ +1, t \in (\theta, t_{10}], \end{cases}$$

სადაც θ არის გადართვის წირზე მოხვედრის მომენტი (გადართვის მომენტი); t_{10} არის ოპტიმალური დრო.

ახლა ჩვენ უნდა დავთვალოთ ოპტიმალურ ტრაექტორიაზე მოძრაობის ოპტიმალური დრო t_{10}, რაც ტოლი იქნება საწყისი x_0 წერტილიდან გადართვის წირზე მოხვედრის დროისა და ამ წერტილიდან სათავეში გადასვლაზე დახარჯული დროის ჯამის.
ოპტიმალური მართვის სტრუქტურიდან ჩანს, რომ წერტილი ჯერ მოძრაობს $u = -1$ მართვის შესაბამის ტრაექტორიაზე, ხოლო გადართვის შემდეგ $u = +1$ მართვის შესაბამის ტრაექტორიაზე.

x_0 წერტილიდან გამომავალი პარაბოლას განტოლება იქნება

$$x^1 = \frac{(x^2)^2}{2} - 3,$$

ხოლო გადართვის წირთან გადაკვეთის წერტილი იქნება

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ახლა დავთვალოთ დრო, რომელიც საჭიროა $x_0 -$ დან გადართვის წირამდე მოსახვედრად. ეს პროცედურა აღწერილია ქვემოთ

ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = -1 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი საწყისი პირობით ეს ამონახსნი იქნება

$$x^2(s) = -t - 2, x^1(s) = -t^2 / 2 - 2t - 1$$

ცხადია, რომ –თვის შესრულდება პირობა

$$x^1(s) = 3/2, \quad x^2(s) = -\sqrt{3}.$$

აქედან დავადგენთ გადართვის დროს θ–ს , რომელიც ტოლია $\sqrt{3} + 2.$

ახლა ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = 1 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი საწყისი პირობით $x^1(0) = 0, x^2(0) = 0.$ ეს ამონახსნი იქნება

$$x^2(t) = t, \; x^1(t) = t^2 / 2.$$

აქედან დავასკვნით, რომ გადართვის წერტლიდან სათავეში მოხვედრის დროა $\sqrt{3}.$
ამრიგად ოპტიმალური დრო იქნება

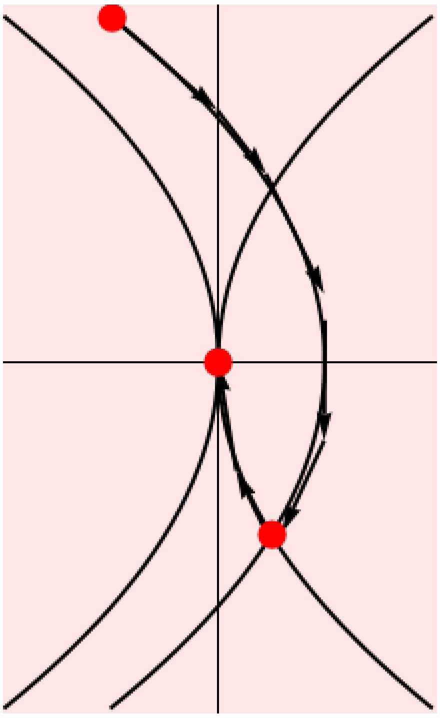
$$t_{10} = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3.}$$

3. განვიხილოთ შემთხვევა როცა

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

.

სქემატურად ოპტიმალური $x_0(t)$ ტრაექტორია მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე,



როგორც წინა ამოცანაში $u_0(t)$ ოპტიმალურ მართვას ექნება სახე

$$u_0(t) = \begin{cases} -1, \ t \in [0, \theta], \\ +1, t \in (\theta, t_{10}], \end{cases}$$

სადაც θ არის გადართვის წირზე მოხვედრის მომენტი (გადართვის მომენტი); t_{10} არის ოპტიმალური დრო.

ახლა ჩვენ უნდა დავთვალოთ ოპტიმალურ ტრაექტორიაზე მოძრაობის ოპტიმალური დრო t_{10}, რაც ტოლი იქნება საწყისი x_0 წერტილიდან გადართვის წირზე მოხვედრის დროისა და ამ წერტილიდან სათავეში გადასვლაზე დახარჯული დროის ჯამის.

ოპტიმალური მართვის სტრუქტურიდან ჩანს, რომ წერტილი ჯერ მოძრაობს $u = -1$ მართვის შესაბამის ტრაექტორიაზე, ხოლო გადართვის შემდეგ $u = +1$ მართვის შესაბამის ტრაექტორიაზე.

x_0 წერტილიდან გამომავალი პარაბოლას განტოლება იქნება

$$x^1 = -\frac{(x^2)^2}{2} + 1,$$

ხოლო გადართვის წირთან გადაკვეთის წერტილი იქნება

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ახლა დავთვალოთ დრო, რომელიც საჭიროა x_0- დან გადართვის წირამდე მოსახვედრად. ეს პროცედურა აღწერილია ქვემოთ

ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = -1 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი საწყისი პირობით $x^1(0) = -1, x^2(0) = 2$ ეს ამონახსნი იქნება

$$x^2(t) = -t + 2, x^1(t) = -t^2 / 2 - 2t - 1$$

აქედან დავადგენთ გადართვის დროს θ–ს , რომელიც ტოლია3/2

ახლა ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = 1 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი საწყისი პირობით $x^1(0) = 0, x^2(0) = 0.$ ეს ამონახსნი იქნება

$$x^2(t) = t,\ \ x^1(t) = t^2 / 2.$$

$$x^2(t) = -2, x^1(t) = 1$$

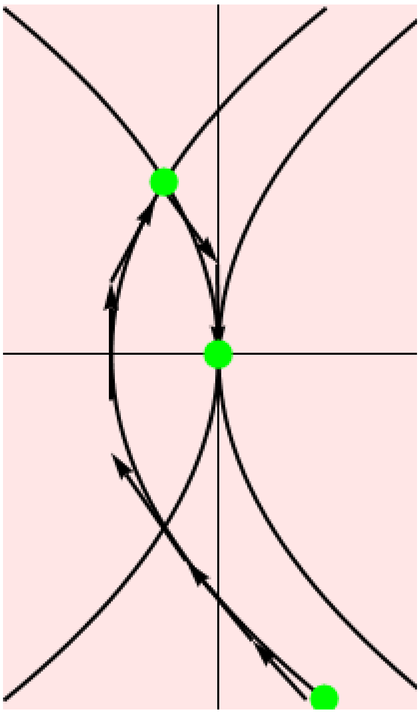
აქედან დავასკვნით, რომ გადართვის წერტლიდან სათავეში მოხვედრის დროა $\sqrt{2}$
ამრიგად ოპტიმალური დრო იქნება

$$t_{10} = \sqrt{2} + 3 / 2$$

4. განვიხილოთ შემთხვევა როცა

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

სქემატურად ოპტიმალური $x_0(t)$ ტრაექტორია მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე



როგორც წინა ამოცანაში $u_0(t)$ ოპტიმალურ მართვას ექნება სახე

$$u_0(t)=\begin{cases}-1,\ t\in[0,\theta],\\ +1, t\in(\theta,t_{10}],\end{cases}$$

სადაც θ არის გადართვის წირზე მოხვედრის მომენტი (გადართვის მომენტი); t_{10} არის ოპტიმალური დრო.

ახლა ჩვენ უნდა დავთვალოთ ოპტიმალურ ტრაექტორიაზე მოძრაობის ოპტიმალური დრო t_{10}, რაც ტოლი იქნება საწყისი x_0 წერტილიდან გადართვის წირზე მოხვედრის დროისა და ამ წერტილიდან სათავეში გადასვლაზე დახარჯული დროის ჯამის.

ოპტიმალური მართვის სტრუქტურიდან ჩანს, რომ წერტილი ჯერ მოძრაობს $u=-1$ მართვის შესაბამის ტრაექტორიაზე, ხოლო გადართვის შემდეგ $u=+1$ მართვის შესაბამის ტრაექტორიაზე.

x_0 წერტილიდან გამომავალი პარაბოლას განტოლება იქნება

$$x^1=\frac{(x^2)^2}{2}-1,$$

ხოლო გადართვის წირთან გადაკვეთის წერტილი იქნება

$$\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

ახლა დავთვალოთ დრო, რომელიც საჭიროა x_0- დან გადართვის წირამდე მოსახვედრად. ეს პროცედურა აღწერილია ქვემოთ

ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = -1 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი საწყისი პირობით $x^1(0) = -1, x^2(0) = 2$ ეს ამონახსნი იქნება

$$x^2(t) = -t - 2, x^1(t) = -t^2 / 2 - 2t + 1$$

აქედან დავადგენთ გადართვის დროს θ–ს , რომელიც ტოლია $2\sqrt{2}$ -2

ახლა ვიპოვოთ

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = 1 \end{cases}$$

სისტემის ამონახსნი საწყისი პირობით $x^1(0) = 0, x^2(0) = 0.$ ეს ამონახსნი იქნება

$$x^2(t) = t, \ \ x^1(t) = t^2 / 2.$$

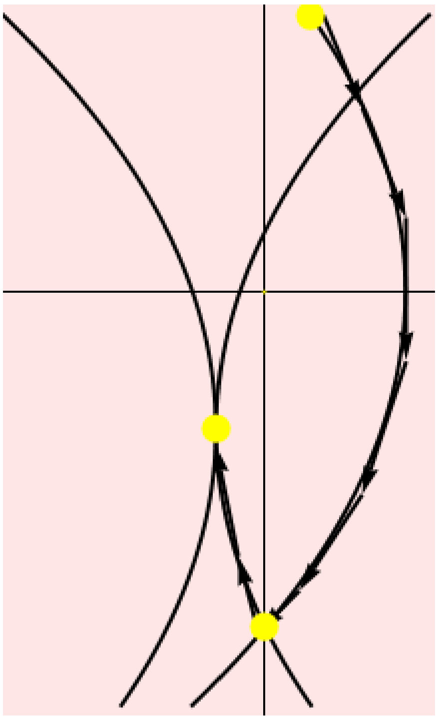
$$x^2(t) = -2, x^1(t) = 1$$

აქედან დავასკვნით, რომ გადართვის წერტლიდან სათავეში მოხვედრის დროა $\sqrt{2}$
ამრიგად ოპტიმალური დრო იქნება

$$t_{10} = 3\sqrt{2} - 2$$

ჩვენ განვიხილეთ საკოორდინატო სიბრტყის 4 სხვადასხვა მეოთხედში მოთავსებული წერტილის სათავეში გადასვლა.

ახლა კი ვნახოთ თუ რა სახე ექნება გადართვის წირს და გრაფიკს თუ საკოორდინატო სიბრტის ნებისმიერ წერტილს გადავიყვანთ სათავისგან განსხვავებულ წერტილში.



ლიტერატურა

1. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянсий, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптималъных процессов, изд-во Наука, Москва 1976.
2. В.Г.Болтянсий. Математические методы оптималнъного управления. изд-во Наука, Москва 1969.
3. R. V. Gamkrelidze. Discovery of the maximum principle, J. Dyn. Contr. Syst. 5 (4), 1999, 437-451.
4. თ. თადუმაძე. ოპტიმალური მართვა (ლექციების კურსი), 2010.