



თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებრივმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

საბაკალავრო პროგრამა ფიზიკა

ელემენტარული ნაწილაკებისა და კვანტური ველების მიმართულება

მემბრანული სამყაროები

ავტორი:

ოთარ სახელაშვილი

ხელმძღვანელი:

ასოც. პროფ. მერაბ გოგბერაშვილი

ქ. თბილისი 2014 წ.

სარჩევი

1 ანოტაცია	2
1.1 ქართულად	2
1.2 ინგლისურად	2
2 შესავალი	3
3 ძირითადი მოდელი	5
3.1 მოდელის ჩამოყალიბება	5
3.2 აინშტაინის განტოლებების ამონახსნები	5
3.3 დროითი საშუალოები	7
4 სკალალური ველის ლოკალიზაცია	7
4.1 განტოლება სკალალური ველისთვის	7
4.2 რიცხვითი ამონახსნი	9
5 კოსმოლოგიური ამონახსნი	11
5.1 მოდელი	11
5.2 განტოლებები და ამონახსნი	11
6 დასკვნა	15
6.1 მატერიის ლოკალიზაცია	15
6.2 კოსმოლოგიური ამონახსნი	15
7 დანართი	16
7.1 განხილული დიფერენციალური განტოლებები	16
7.2 მოდულის წარმოებული	16
7.3 ექსპონენტის გასაშუალოება	17
8 ლიტერატურა	18

1 ანოტაცია

1.1 ქართულად

მემბრანული სამყაროები მნიშვნელოვანია თეორიული ფიზიკის ღია საკითხების გადაჭრისათვის. ძირითადად განიხილავენ დროისგან დამოუკიდებელ გეომეტრიას, თუმცა არსებობს რამდენიმე მოდელი დროზე დამოკიდებული ველებით და მეტრიკით. მოცემულ ნაშრომში ზუსტად ასეთი სურათია - მდგარი გრავიტაციული ტალღებით, ფანტომური „ჩამჭერი“ სკალალური ველით წარმოქმნილი არასტაციონალური 6-განზომილებიანი სამყარო. მოცემული მოდელი წარმოადგენს 5-განზომილებიანი სცენარის განზოგადებას და განსხვავდება სხვა 6-განზომილებიანი სისტემების მეტრიკებისგან. ნაშრომში განხილულია როგორც ნაწილაკების ჩაჭერა ასევე კოსმოლოგიური ამონახსნი.

1.2 ინგლისურად

Braneworld models involving large extra dimensions have been very useful in addressing several open questions in high energy physics. Most of the braneworlds are realized as time-independent field configurations. However, there have appeared several braneworld models that assumed time-dependent metrics and fields. In this paper we study the non-stationary 6D braneworld generated by standing gravitational waves coupled to a phantom-like bulk scalar field. The model is generalization of 5D standing waves scenario. The metric we use differs from those of the 6D models. In the work is developed matter localization and cosmological solutions.

2 შესავალი

მაქსველის თეორიის შექმნის პირველივე დღეებიდან დადგა ელექტრომაგნეტიზმის და გრავიტაციის გაერთიანების საკითხი. მსგავსი გაერთიანების პირველი მცდელობა იყო განზომილების დამატება და გრავიტაციის როგორც სკალარული ველის განიხილება. ფარდობითობის ზოგადმა თეორიამ კი შემოაბრუნა მოცემული გეზი, კალუცამ და კლაინმა შეძლეს მაქსველის თეორია გაერთიანებინათ 5-განზომილებიანი მოდელის ფარგლებში, იმ აზრით რომ მეხუთე დამატებითი განზომილება ფაქტორიზირდებოდა. თანამედროვე ექსპერიმენტული მონაცემები ასეთ გაერთიანების შესაძლებლობას არ გამოირიცხავს, თუმცა ექსტრა განზომილებას სულ უფრო და უფრო მცირეს ხდის [1].

მემბრანული მოდელების შემოტანა თეორიულ ფიზიკაში დაკავშირებულია დაგროვილი ღია საკითხების გადაწყვეტასთან [2]. მსგავსი მოდელი პირველად ჩნდება რუბაკოვის ნაშრომში [3], სადაც ნავარაუდებია რომ ჩვენი სამყარო არის მრავალგანზომილებიანი და ჩვენ ვკომპაქტირდებით 1+3 განზომილებაში. ამავდროულად მოცემული კონცეფციის ფარგლებში ნაწილაკებს შეუძლიათ ურთიერთქმედება მემბრანასთან და გარკვეული ახალი თვისობრიობების შეძენა. ასეთი მიდგომა გამოიყენება თეორიული ფიზიკის სხვადასხვა ფენომენის ასახსნელად [4]. იერარქიის პრობლემის ახსნა ამ მიდგომაში ეკუთვნის გოგბერაშვილს [5], სადაც მან გამოიყენა არაკომპაქტური დამატებითი განზომილება და მემბრანაზე ლოკალიზაცია ხდებოდა არა დამატებითი განზომილების სიმცირის, არამედ ექსტრა განზომილებაში არსებული ველით.

მემბრანულ მოდელებში გამოიყოფა ე.წ. მდგარი ტალღების მემბრანული სამყაროები, სადაც ლოკალიზაციას იწვევს გრავიტაციული მდგარი ტალღები, რომლებიც მიიღწევა ექსტრა განზომილებაში არსებული ველების გეომეტრიასთან თვითშეთანხმებით. მდგარი ტალღებით მიღებული მოდელები დღეს აქტუალურია და იწვევს ფართო ინტერესს [6]. მოცემული მოდელების ფარგლებში შესაძლებელია, მაგალითად, აიხსნას ფერმიონული იერარქიის პრობლემა, რომელიც გადაჭრილია 5 განზომილებიან მოდელში [7,8].

5-განზომილებიან მდგარ ტალღებიანი მემბრანულ სამყაროებში [9] ხასიათდება 3-განზომილებიანი სივრცის ანიზოტროპიით ექსტრა განზომილებაში. ეს პრობლემა შესაძლებელია დაძლეული იქნას კიდევ ერთი დამატებითი განზომილების შემოტანით. აქედან გამომდინარე, მინიმალური სიმეტრიული მოდელი არის 6-განზომილებიანი. რომელშიც საჭიროა ნაწილაკის ლოკალიზაციის და გლობალურად ფაქტორიზაციის ჩვენება (ანუ კოსმოლოგიური ამონახნის მოძებნა სადაც დამატებითი განზომილებები დინამიურად ჩაიკეცება [10]). მოცემული საბაკალავრო ნაშრომი ეხება ამ ორ პრობლემას. პირველი ამოცანა განხილულია სტატიაში [11], ხოლო მეორე ამოცანის შესაბამისი სტატია დასაბეჭდადაა გამზადებული. ველის წყაროდ გამოყენებულია ე.წ. ფანტომური სკალარული ველი, რომელიც თვითშეთანხმებულია

გეომეტრიასთან, ნაჩვენებია მემბრანაზე სკალალური ნაწილაკების ჩაჭერა (მაგ. π მეზონების) და ნაპოვნია კოსმოლოგიური ამონახსნი. გრაფიტაციული ველის განტოლებები ორივე ამოცანაში ანალიზურად და ზუსტად იხსნება, ხოლო სკალალური ველის ჩაჭერა კი ნაჩვენებია კომპ. მოდელირების გამოყენებით.

3 ძირითადი მოდელი

3.1 მოდელის ჩამოყალიბება

დავუშვათ რომ, გვაქვს 6-განზომილებიანი სივრცე დრო სიგნატურით 1+5 და გვაქვს არათვიქმედი, უმასო ფანტომური სკალალური ველი. მაშინ მოცემული სისტემის ქმედებაა:

$$S = \int d^6x \sqrt{g} \left(\frac{M^4}{2} R - \frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi \right) , \quad (1)$$

სადაც M^4 არის ფუნდამენტური შკალა, რომელიც უკავშირდება 6-განზომილებიან ნიუტონის კონსტანტას $G = 1/(8\pi M^4)$ (მაღალი თანრიგის ლათინური სიმბოლოები ნომრავს 6 კოორდინატებს და ჩვენ ვიყენებთ ერთეულებს სადაც $c = \hbar = 1$). მოცემული ქმედების ვარირებით მეტრიკის მიმართ (g_{AB}), ვიღებთ 6-აინშტაინის განტოლებებს:

$$R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R = \frac{1}{M^4} T_{AB} , \quad (2)$$

სადაც:

$$T_{AB} = -\partial_A \phi \partial_B \phi + \frac{1}{2} g_{AB} \partial^C \phi \partial_C \phi . \quad (3)$$

თუ მოცემული სისტემის შპურს ავიღებთ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (3) გათვალისწინებით (2) მიიღებს ფორმას:

$$R_{AB} = -\frac{1}{M^4} \partial_A \phi \partial_B \phi . \quad (4)$$

3.2 აინშტაინის განტოლებების ამონახსნები

აინშტაინის განტოლებების (4) ამონახსნი ვეძებთ სახით:

$$ds^2 = e^S dt^2 - e^u (dx^2 + dy^2 + dz^2) - dr^2 - e^{-3u} d\theta^2 , \quad (5)$$

სადაც $S = S(r)$ და $u = u(t, r)$ რაღაც ფუნქციებია. ჩვენ ვუშვებთ რომ "ფანტომური" სკალალური ველი დამოკიდებულია დროზე და ექსტრა განზომილების მოდულზე $|r|$. მეტრიკით (5) აღვწერთ გეომეტრიას რომელშიც მემბრანა განთავსებულია r ღია დამატებით განზომილების სათავეში და x , y და z არის კოორდინატები მემბრანის გასწრივ. კოორდინატა θ შეიძლება ჩავთვალოთ კომპაქტურად და მოცემულ ენერგიებისთვის ჩაკეტილად. როგორც ჩანს, მოცემული მოდელი არის სიმეტრიული 3D კოორდინატების მიმართ, რაც მას გამოარჩევს სხვა 6-განზომილებიანი მოდელებისგან [12].

აინშტაინის განტოლებები (4), ანზაცით (5), იღებს ფორმას:

$$\begin{aligned} 3\dot{u}^2 - \frac{1}{2}S''e^S - \frac{1}{4}S'^2e^S &= \frac{1}{M^4}\dot{\phi}^2, \\ 3\dot{u}u' &= \frac{1}{M^4}\dot{\phi}\phi', \\ \frac{1}{2}S'' + \frac{1}{4}S'^2 + 3u'^2 &= \frac{1}{M^4}\phi'^2, \\ -2\ddot{u} + S'e^S u' + 2u''e^S &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

სადაც წერტილი და შტრიხი შესაბამისად არის დროითი და ღია ექსტრა განზომილებითი წარმოებულები . თუ ჩვენ დავუშვებთ რომ, მეტრიკის ველი u პროპორციულია ჩამჭერი ველის ϕ და განტოლების ამონახნს მოვძებნით განცალკეული ცვლადებით:

$$u(t, r) = \frac{1}{\sqrt{3M^4}} \phi(t, r) = \sin(\omega t)f(r), \quad (7)$$

მაშინ (6) მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} S'' + \frac{1}{2}S'^2 &= 0, \\ 2\omega^2 f + S'e^S f' + 2f''e^S &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

ამ სისტემის პირველი განტოლების ამონახნი, იმ მოთხოვნით, რომ $r = 0$ -ში უნდა გვქონდეს მინკოვსკის სივრცე ($S(0) = 0$), არის:

$$S = \ln \left(1 + \frac{r}{a} \right)^2, \quad (9)$$

სადაც a რაღაც კონსტანტია, რომელიც ფიზიკურად მემბრანის "სისქეა". (9) ჩასმით (8)-ის მეორე განტოლებაში მივიღებთ:

$$f'' + \frac{1}{a+r}f' + \frac{a^2\omega^2}{(a+r)^2}f = 0. \quad (10)$$

მემბრანაზე, $r = 0$, მინკოვსკის სივრცის მიღების მოთხოვნით, განტოლება (10) მიიღებს სახეს:

$$u(t, r) = C \sin(\omega t) \sin \left(a\omega \ln \left[1 + \frac{r}{a} \right] \right), \quad (11)$$

სადაც C რაღაც მუდმივია. (9)-ის და (11)-ის ჩამსმით (5) მიიღებს სახეს:

$$ds^2 = (1 + r/a)^2 dt^2 - e^{\sin(\omega t)f} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - dr^2 - e^{-3\sin(\omega t)f} d\theta^2. \quad (12)$$

სადაც $f = C \sin(a\omega \ln[1 + r/a])$.

3.3 დროითი საშუალოები

როდესაც მდგარი ტალღების სიხშირე ω გაცილებით დიდია ნაწილაკების სიხშირეზე. ანუ თუ მემბრანა იმ ნაწილაკზე ენერგიულია, რომლებიც არიან მემბრანაზე:

$$\omega \gg E, \quad (13)$$

მემბრანაზე მეტრიკის დროითი გასაშუალოების უფლება გვაქვს. შეგვიძლია გავასაშუალოოთ ოსცილირებადი ექსპონენტები მატერიის მოძრაობის განტოლებებშიც. თუ გავიხსენებთ რომ:

$$\langle e^{D \sin(x)} \rangle = I_0(D), \quad (14)$$

სადაც I_0 ბესელის მოდიფიცირებული ნულოვანი რიგის ფუნქციაა, მაშინ შეგვიძლია (13)-ის და (14)-ის გათვალისწინებით ვიპოვნოთ (12) მეტრიკის საშუალო:

$$\langle ds^2 \rangle = (1 + r/a)^2 dt^2 - I_0(f) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - dr^2 - I_0(3f) d\theta^2 \quad (15)$$

4 სკალარული ველის ლოკალიზაცია

4.1 განტოლება სკალარული ველისთვის

დავუშვათ 6-სივრცეში გვაქვს უმაღლესი სკალარული ველი Φ , განვიხილოთ მისი ლოკალიზაცია. ამისთვის უნდა დავწეროთ მისი ქმედება:

$$S_\Phi = \frac{1}{2} \int d^6x \sqrt{g} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi. \quad (16)$$

შესაბამისი კლაინ-გორდონის განტოლებაა:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_M (\sqrt{g} g^{MN} \partial_N \Phi) = 0. \quad (17)$$

ვეძებთ ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$\Phi(x^A) = \psi(t, x, y, z) \sum_l \nu_l(r) e^{il\theta} \quad (18)$$

თუ ჩავთვლით, რომ კუთხური განზომილება მცირეა და მოვძებნით მხოლოდ S ტალღას ($l = 0$), მაშინ არაფერი იქნება დამოკიდებული კუთხეზე (θ). (18)-ის ჩასმით (16)-ში და დროითი (14) გასაშუალოებით ქმედებას ექნება სახე:

$$S_\Phi = \frac{1}{2} \int d^6x \left\{ \frac{\nu^2 (\partial_t \psi)^2}{1 + r/a} - \left(1 + \frac{r}{a}\right) \nu'^2 \psi^2 - \left(1 + \frac{r}{a}\right) \nu^2 \langle e^u \rangle [(\partial_x \psi)^2 + (\partial_y \psi)^2 + (\partial_z \psi)^2] \right\}. \quad (19)$$

იმისთვის, რომ ადგილი ჰქონდეს მემბრანაზე სკალალური ველის ჩაჭერას, საჭიროა ექსტრა კოორდინატებით ინტეგრების მერე მიღებული კონსტანტები არ ნულდებოდეს და იყოს სასრული. ანუ ნულოვანი მოდები რომ არსებობდეს ქმედება (19) უნდა იყოს ექსტრა კოორდინატებით ინტეგრებადი, ე.ი. თუ $(1 + r/a)\nu'^2$, $(1 + r/a)\langle e^u \rangle \nu^2$ და $\frac{1}{1+r/a}\nu^2$ არის ინტეგრებადი.

(17) დიფერენციალური ოპერატორი კლაინ-გორდონის განტოლებისთვის (14) გასაშუალოებით მიიღებს სახეს:

$$\hat{L} = \frac{1}{(1 + r/a)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 + \frac{r}{a}\right) \langle e^{-u} \rangle \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \frac{\partial}{\partial r} - \langle e^{3u} \rangle \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} . \quad (20)$$

მოცემული ოპერატორის მოდებით (18)-ზე S ტალღის ნაწილზე მივიღებთ განტოლებას:

$$\left[\left(1 + \frac{r}{a}\right) \nu(r)' \right]' + \left[\frac{1}{(1 + r/a)} E^2 - \left(1 + \frac{r}{a}\right) \langle e^u \rangle (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \right] \nu(r) = 0 . \quad (21)$$

ცვლადის გარდაქმნით:

$$\nu(r) = \frac{\phi}{\sqrt{1 + r/a}} , \quad (22)$$

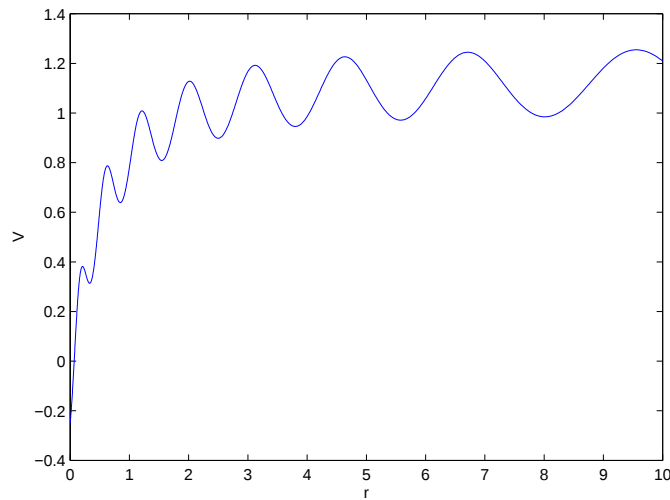
(21) მიიღებს სახეს (შრედინგერის მაგვარი განტოლება):

$$\phi'' - U(r)\phi = 0 . \quad (23)$$

სადაც $U(r)$ არის:

$$U(r) = \langle e^{-u} \rangle (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{a^2 E^2}{(a + r)^2} - \frac{1}{4(a + r)^2} , \quad (24)$$

სურ. 1 ნახვენებია $U(r)$ ქცევა.



სურ 1: $U(r)$ ნულოვანი მოდების ეფექტური პონტეციალის გრაფიკი.

თუ ჩვენ მივიჩნევთ, რომ

$$\langle e^{-u} \rangle (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \approx P^2, \quad (25)$$

მაშინ მემბრანასთან ახლოს $a \gg r$, (24) მიიღებს სახეს:

$$\phi'' - \left(P^2 - E^2 - \frac{1}{4a^2} \right) \phi = 0. \quad (26)$$

თუ განვიხილავთ ზღვარს $r \rightarrow 0$ მაშინ უნდა შეგვესრულებს სტანდარტული დისპერსიული თანადობა:

$$E^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \quad (27)$$

და მოცემული ნაწილაკითვის ამონახსნი არის ბრტყელი ტალღა:

$$\phi|_{r \rightarrow 0} = C_1 e^{ir/2a} + C_2 e^{-ir/2a}, \quad (28)$$

სადაც C_1 და C_2 მუდმივებია.

თუ განვიხილავთ მემბრანისგან შორ ამონახსნს, $r \rightarrow \infty$ მაშინ (26) მიიღებს სახეს:

$$\phi'' - P^2 \phi = 0, \quad (29)$$

და ამონახსნი იქნება:

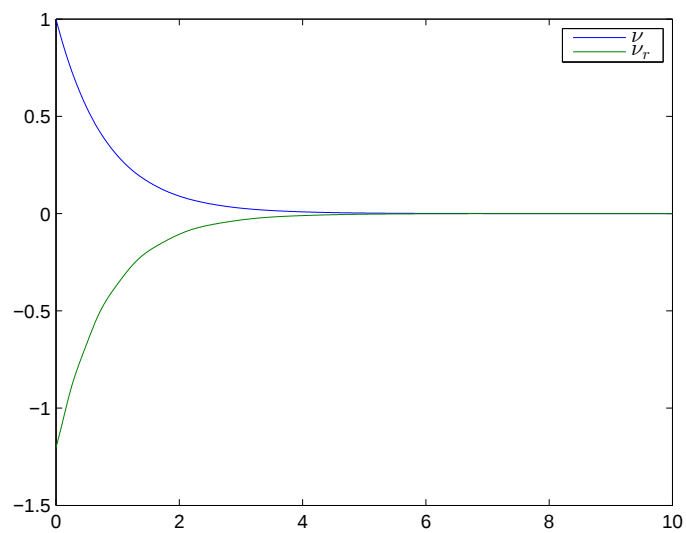
$$\phi|_{r \rightarrow \infty} = B_1 e^{r/P} + B_2 e^{-r/P}, \quad (30)$$

სადაც B -ები სხვა კონსტანტებია, თუ დავუშვებთ რომ $B_1 = 0$ მაშინ ფუნქცია ϕ სწრაფად ეცემა მემბრანის გარეთ. ანუ სკალარული ველი Φ ლოკალიზირებული იქნება მემბრანაზე.

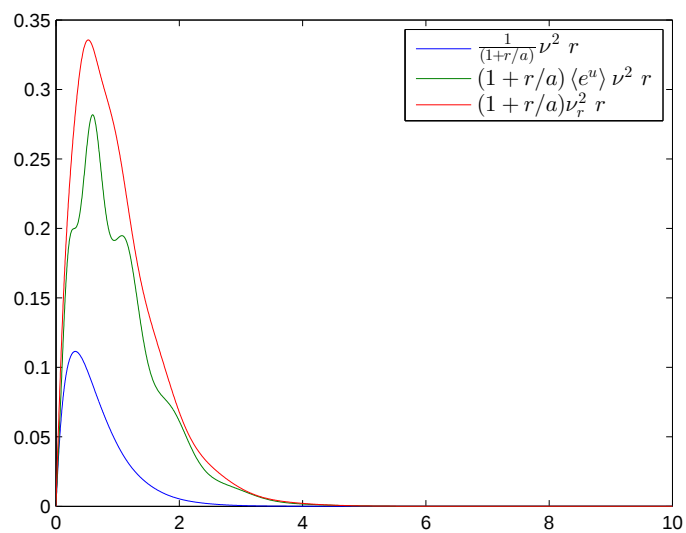
4.2 რიცხვითი ამონახსნი

ჩვენ ვაჩვენებთ ნულოვანი მოდის ნაწილაკის წმინდა გრავიტაციული ლოკალიზაცია. ჩვენ ასევე შეგვიძლია მოცემული განტოლება ამოვხსნათ რიცხვითად. ამისთვის უნდა ამოვხსნათ (21) რიცხვითი სქემით. ჩვენ გამოვიყენებთ კომპიუტერულ სისტემა MATLAB-ში ჩაშენებული რუნგე-კუტას 4-5 რიგის სქემა, 10^{-11} სიზუსტით. სურ. 2 ნაჩვენებია $\nu(r)$ და მისი პირველი წამოებულის ყოფაქცევა მემბრანასთან ახლოს.

რომ შევამოწმოთ Φ ლოკალიზაცია უნდა ვაჩვენოთ რომ r -ით ყველა ინტეგრალი (19) ქმედებაში სასრულია, სურ. 3-ზე ნაჩვენებია r -ზე დამოკიდებული ფაქტორები გამრავლებული r -ზე. იქ ჩანს რომ ყველა ეს ფაქტორი ეცემა, ე.ი. ყველა ფაქტორი ინტეგრებადია და ნულოვანი მოდები ლოკალიზებულია მემბრანაზე.



სურ 2: რიცხვითად ამონახნილი ν და ν' .



სურ 3: r -დამოკიდებული ფაქტორები (19) გამრავლებული r -ზე

5 კოსმოლოგიური ამონახსნი

5.1 მოდელი

წინა თავებში ჩვენ ვაჩვენეთ ნაწილაკების ჩაჭერა, დამატებითი განზომილებების გაქრობა და ლოკალიზაცია. ახლა გვინდა ვაჩვენოთ მაკროსკოპიული. ანუ ე.წ. კოსმოლოგიური ამონახსნი. ამისთვის ჩვენ კვლავ ვიყენებთ იგივე ტიპის მოდელს, თუმცა მიდგომა იქნება ცოტათი განსხვავებული. ჩვენ კვლავ დავუშვებთ რომ გვაქვს არათვითქმედი სკალალური ველი რომელიც თვითშეთანხმებულად უნდა ამოიხსნას გეომეტრიასთან ერთად. მოცემული სცენარი წამოდგენს [10] მოდელების განზოგადებას. ამითვის ჩვენ ვიღებთ ისევ (1) ქმედებას, რომელსაც ვამატებთ მემბრანის ლაგრანჟიანს, რადგან ახლა ჩვენ უნდა ვიპოვნოთ ზუსტად მემბრანაზე მჯდარი ამონახსნები. ქმედების ვარირებით ვიღებთ აიშტაინის განტოლებებს. (1) ქმედება, მემბრანის ლაგრანჟიანის დამატებით მიიღებს სახეს:

$$S = \int d^6 x \sqrt{g} \left(\frac{M^4}{2} R - \frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \phi \partial_N \phi + L_b \right), \quad (31)$$

მისი ვარირებით ჩვენ მივიღებთ, განტოლებებს (5) გაზომილებაში [10] ანალოგიურს):

$$R_{AB} = \frac{1}{M^4} (-\partial_A \phi \partial_B \phi + T_{AB} - \frac{1}{4} g_{AB} T). \quad (32)$$

აქ T წარმოადგენს მემბრანის ენერგია-იმპულსის ტენზორს. ცხადია რადგან ჩვენ ვზივართ მემბრანაზე, მისი ენერგია-იმპულსის ტენზორი იქნება დიაგონალური, მისი სისქის სიმცირის გამო r -ის მიმართ დელტა სინგულარული ($\delta(r)$) მოდელურად გვიჩვენებს მემბრანას რომ ზომა აქვს და არის თხელი, "შეუღწევადი"), მას არ ექნება r გასწორივი კომპონენტი, რადგან ის არ იცვლება მხოლოდ r -ის ჰიპერზედაპირზე. ამ ყველაფრის გათვალისწინებით ზოგადად მემბრანის ენერგია-იმპულსის ტენზორს ექნება სახე:

$$T_A^B = 1/M^4 \begin{pmatrix} \lambda_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_\theta \end{pmatrix} \delta(r) \quad (33)$$

სადაც λ -ები რაღაც ფუნქციებია, t -ს. $\lambda = \sum \lambda_A^A$

5.2 განტოლებები და ამოხსნა

რომ ამოვხსნათ (32) ამისთვის ჩვენ ვიღებთ მეტრიკულ ანზატს:

$$ds^2 = e^S dt^2 - a^2 e^u (dx^2 + dy^2 + dz^2) - dr^2 - \frac{1}{a^6} e^{-3u} d\theta^2, \quad (34)$$

რომელიც (5)-ისგან განსხვავდება ექსტრა a ფაქტორებით და ნებისმიერი ფიქსირებული a -ისთვის გარდაქმნით $x' = ax$, $y' = ay$, $z' = az$, გადადის ძველ ანზაცში. ჩვენ ისევ ვაკეთებთ დაშვებას, რომ $a = a(t)$, $S = S(|r|)$ და $u = u(|r|, t)$. მაშინ (34)-ის ჩასმით (32) და (33)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ განტოლებებს (იმ დაშვებით რომ ჩვენ განვიხილავთ მემბრანის სისქის ეფექტებსაც):

$$\begin{aligned}
12 \frac{\dot{a}\dot{u}}{a} + 3\dot{u}^2 + 12 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{2} S'' e^S - \delta(r) S' e^S - \frac{1}{4} S'^2 e^S &= \frac{1}{M^4} \dot{\phi}^2 + e^S (\lambda_t - \frac{1}{4} \lambda) \delta(r) \\
3u' (2 \frac{\dot{a}}{a} + \dot{u}) &= \frac{1}{M^4} \phi' \dot{\phi} \\
\frac{1}{2} S'' + \frac{1}{4} S'^2 + 3u'^2 + S' \delta(r) &= \frac{1}{M^4} \phi'^2 + \frac{1}{4} \lambda \delta(r) \\
\frac{1}{4} \frac{1}{e^S} (-4 \frac{\ddot{a}}{a} - 2\ddot{u} + 4 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + S' e^S u' + 2u'' e^S + 4u' e^S \delta(r)) &= -(\lambda_\alpha - \frac{1}{4} \lambda) \delta(r) \\
\frac{3}{4} \frac{1}{e^S} (-4 \frac{\ddot{a}}{a} - 2\ddot{u} + 4 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + S' e^S u' + 2u'' e^S + 4u' e^S \delta(r)) &= (\lambda_\theta - \frac{1}{4} \lambda) \delta(r)
\end{aligned} \tag{35}$$

სადაც ისევ წერტილი დროით და შტრიხი სივრცითი ($|r|$) წარმოებულებია (მომავალში სადაც იქნება r დაწერილი იგულისხმება მისი მოდული $|r|$). აქ გვაქვს ორი ტიპის წევრები, ერთი რომლებიც განზოგადოებულ ფუნქციების ტოლობას წარმოადგენს მხოლოდ და მეორე რომელიც კლასიკურს. დაშვებით, რომ ცალ-ცაკე უნდა შესრულდეს ტოლობა და გავიხსენებთ, რომ $\delta(r)$ -ის წინ მდგარი წევრები მოცემული ფუნქციის ნახტომს აღნიშნავს 0 წერტილში, მივიღებთ რომ:

$$\begin{aligned}
[S'] &= -\lambda_t + \frac{1}{4} \lambda = \frac{1}{4} \lambda \\
[u'] &= \frac{1}{4} (\lambda_\theta - \lambda_\alpha) \\
\lambda_t &= 0
\end{aligned} \tag{36}$$

თუ დავუშვებთ, რომ გეომეტრია მოცემული წესით არის ველებთან თვითშეთახმებული:

$$\begin{aligned}
u(t, r)' &= \frac{1}{\sqrt{3M^4}} \phi(t, r)' \\
\dot{u}(t, r) + 2 \frac{\dot{a}}{a} &= \frac{1}{\sqrt{3M^4}} \dot{\phi}(t, r)
\end{aligned} \tag{37}$$

მაშინ (35), (36) და (37) მარტივდება:

$$\begin{aligned}
S'' + \frac{1}{2} S'^2 &= 0 \\
-4 \frac{\ddot{a}}{a} - 2\ddot{u} + 4 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + S' e^S u' + 2u'' e^S &= 0
\end{aligned} \tag{38}$$

თუ მოვითხოვთ რომ ფიქსირებული a -სთვის მოცემული განტოლებები უნდა დაემთხვეს (8)-ს, მაშინ მივიღებთ რომ:

$$\begin{aligned} S'' + \frac{1}{2}S'^2 &= 0 \\ -2\ddot{u} + S'e^S u' + 2u''e^S &= 0 \\ -\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

რომლის ამონახსნებია:

$$\begin{aligned} u(r, t) &= C \sin(\omega t) \sin(b \ln[1 + \frac{r}{b}]) \\ S(r) &= \ln(1 + \frac{r}{b})^2 \\ a(t) &= \alpha e^{Ht} \end{aligned} \quad (40)$$

ახლა დავუბრუნდეთ (33)-ში არსებული λ -ების განსაზღვრას. (40)-დან ჩანს რომ:

$$\begin{aligned} [S'] &= \frac{2}{b} \\ [u'] &= C\omega \sin \omega t \end{aligned} \quad (41)$$

თუ გავიხსენებთ (36) მაშინ მივიღებთ, რომ:

$$\begin{aligned} \frac{8}{b} &= \lambda_\theta + 3\lambda_\alpha \\ 4C\omega \sin \omega t &= \lambda_\theta - \lambda_\alpha \end{aligned} \quad (42)$$

საიდანაც და (36)-ის გათვალისწინებით:

$$\begin{aligned} \lambda_\theta &= \frac{2}{b} + 3C\omega \sin \omega t \\ \lambda_\alpha &= \frac{2}{b} - C\omega \sin \omega t \\ \lambda_t &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

აქ წევრი $b/2$ არის წნევის როლში, ხოლო, ოსცილირებადი სინუსი კი გვიჩვენებს ნახტომის ცვლილებას, ანუ მემბრანის ფორმის მუდმივ ოსცილაციას.

ამონახსნებით აღჭურვილები დავუბრუნდეთ მეტრიკის ანალიზს. მოთხოვნით, რომ ნებიმიერი ფიქსირებულ a -თვის ისევ მინკოვსკის სივრცე გვაქვს. ადვილი დასანახია, რომ თუ $H = 0$, მაშინ გადავდივართ ისევ ძველ განტოლებებში და (37) გადადის მოთხოვნაში (7) მუდმივის სიზუსტით, რაც მამტაბის თავისუფლების გამო იგივეა. ასევე ჩანს, რომ $\ddot{u}(t, r) = \frac{1}{\sqrt{3M^4}} \ddot{\phi}(t, r)$, ე.ი. სკალარული ველისთვის განტოლება არ იცვლება.

ახლა გავუკეთოთ ანალიზი ამონახსნს, აქ b არის მემბრანის სისქე, C ისევ არ ფიქსირდება, ω კვლავ სიხშირეა. რა შეგვიძლია ვთქვათ ალფაზე, ის არის უბრალოდ მაშტაბის არჩევა ავირჩიოთ 1-ად. (40), (34)-ით მივიღებთ მოცემულ ანზაცს:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r}{b}\right)^2 dt^2 - e^{2Ht} e^{\sin(\omega t)f} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - dr^2 - e^{-6Ht} e^{-3\sin(\omega t)f} d\theta^2, \quad (44)$$

სადაც $f = C \sin(b\omega \ln[1 + \frac{r}{b}])$ და თუ მას გავასაშუალოებთ (14) ოსცილირებადი ექსპონენტებით, მაშინ ის მიიღებს ფორმას:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r}{b}\right)^2 dt^2 - e^{2Ht} I_0(f) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - dr^2 - e^{-6Ht} I_0(3f) d\theta^2, \quad (45)$$

ამონახსნი გვეუბნება, რომ შორეულ მომავალში, 3-სივრცე დიდია r განზომილებაზე და ქრება კომპაქტური θ განზომილება. თუ მატერია ლოკალიზებულია $r = 0$ ($f = 0$, $I_0(0) = 1$) ყოველ ფიქსირებულ დროში, რაც დემონსტრირებული იყო. მაშინ ანზაცი მიიღებს სახეს $r = 0$:

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (46)$$

ჩვენ ვხედავთ რომ 3-სივრცე იზრდება ევოლუციის პროცესის დროს.

ახლა ვნახოთ სივრცე რა სიჩქარით ფართოვდება, ავირჩიოთ 3-სივრცეში ერთდროულად ორი წერტილი რომელიც (46)-ით ინტერვალი მათ შორის იქნება:

$$ds^2 = e^{2Ht} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (47)$$

საიდანაც შეგვიძლია ვთქვათ რომ სივრცე ექსპონენციალურად ფართოვდება. $\Delta l' = e^{Ht} \Delta l$, რაც არის ჰაბლის კანონი ინფლაციის დროს.

6 დასკვნა

6.1 მატერიის ლოკალიზაცია

მოცემულ მოდელში წარმოდგენილი იყო სკალალური ველის ლოკალიზაცია მდგარი ტალღებით შექმნილ მემბრანულ სამყაროში. მოდელში განხილული იყო ორი დამატებითი განზომილება, ერთი ღია და მეორე კომპაქტური - ორივე სივრცის მაგვარი. მოდელის ძირითადი ღირსებაა, რომ მემბრანის 3-სივრცე იზოტროპულია დამატებითი განზომილებაში გადასვლის დროს. მიღებულია მოდელის ზუსტი მეტრიკა და მემბრანულ ველში მოძრავი სკალალური ნაწილაკის ჩაჭერის ზუსტი და მიახლოებითი ამონახსნები. ნაშრომის შესრულების დროს გამოყენებული იყო როგორც ანალიზური ასევე მანქანური გათვლები. მოცემული მოდელი ცხადია ამოწურული არ არის, თუნდაც სანახავია როგორ იქცევა ვექტორი და სპინორი მოცემულ სივრცეში. ასევე სანახავია მოდელში გაჩენილი ფაქტორები რა დამატებით თვისობრიობას აძლევს 6-განზომილებიან უმასო ნაწილაკს 4-მინკოვსკის სივრცეში. თვითონ კვლევის შედეგები დაიბეჭდა ჟურნალში [11].

6.2 კოსმოლოგიური ამონახსნი

მატერიის ლოკალიზაციის მსგავსად ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვს მაკრო ამონახსნს. თუ მატერიის ველებიოს შესაბამის ამონახსნში ჩანს როგორ იქცევიან ნაწილაკები მემრანის ველში, მაკრო ამონახსნში ჩანს თუ როგორ იქცევა კოსმოლოგიური ობიექტები. თუ გვაქვს კოსმოლოგიური ამონახსნი, მაშინ ყველა ის შედეგი რაც იყო მიკრო ამონახსნში სრულდება დროის ნებიმიერ ფიქსირებულ მომენტში მცირე დროების მანძილზე (მიკროსამყაროსთვის დამახასიათებელი დრო). ასევე კოსმოლოგიურ ამონახსნში კარგად ჩანს თუ რატომ ვერ ვხედავთ მაკრო მასშტაბზე ექსტრა განზომილებებს, ისინი უბრალოდ იკეტება, რადგან დიდი დროა უკვე გასული და ასევე იხსენება დამატებითი განზომილებით ჰაბლის კანონი. ამ საკითხებისადმი მიძღვნილი შრომა გამზადებულია დასაბეჭდათ "Dimensional Reduction in 6D Standing Waves Braneworld".

7 დანართი

7.1 განხილული დიფერენციალური განტოლებები

ნაშრომში განხილულია 2 ჩ.დ.გ რომლების დეტალური ამოხსნაც არ არის მოცემილი, მოცემულ დანართში განიხილება მათი ამოხსნა. (8), განხილულ პირველ განტოლებას აქვს სახე:

$$S''(r) + \frac{1}{2}S'^2(r) = 0 \quad (48)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $S' = v$ და იგივერად გადავწერთ განტოლებას განცალკევად ცვლადებში ის მიიღებს სახეს:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2}dr \quad (49)$$

რომლის ამონახსნიცაა $v = \frac{2}{r+b}$, ამის გათვალისწინებით (48) ამონახსნი იქნება:

$$S = S_0 + 2\ln(r+b) - 2\ln(b) = \ln\left(\frac{r}{b} + 1\right)^2 + S_0 \quad (50)$$

განვიხილოთ განტოლება (10), და ამონახსნი ვეძებთ სახით $f = (1+r/b)^\alpha$, მოცემული პირობის ჩასმით განტოლებაში მივიღებთ:

$$\alpha = \pm i\omega b \quad (51)$$

განტოლება წრფივია ამიტომ შეგვიძლია ჩავწეროთ (51)-ის გათვალისწინებით:

$$f = d_1\left(1 + \frac{r}{b}\right)^{i\omega b} + d_2\left(1 + \frac{r}{b}\right)^{-i\omega b} \quad (52)$$

რაც გადაიწერება იგივერად:

$$f = d_1 e^{i\omega b \ln(1+\frac{r}{b})} + d_2 e^{-i\omega b \ln(1+\frac{r}{b})} \quad (53)$$

ეილერის ფორმულის გათვალისწინებით კი ვღებულობთ:

$$f = C_1 \sin(\omega b \ln(1 + \frac{r}{b})) + C_2 \cos(\omega b \ln(1 + \frac{r}{b})) \quad (54)$$

7.2 მოდულის წარმოებული

კოსმოლოგიურ ამონახსნში განიხილება მოდულის გაწარმოება, რომელიც აჩენს დირაკის დელტა ფუნქციის სინგულარობას, დეტალური გამოყვანა მოგვავს აქ. განვიხილოთ $f(|r|)$ და მისი წარმოებული r -ით, $z = |r|$ -ით. ცხადია სამართლიანია:

$$\frac{df}{dr} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dr} = \frac{df}{dz} \text{sign}(r) \quad (55)$$

როგორც ცნობილია $sign(r) = \theta(r) - \theta(-r)$, სადაც $\theta(r)$ ჰევისაიდის ე.წ. კიბისებური ფუნქციაა. თუ გავიხსენებთ რომ:

$$\begin{aligned}\theta(r)' &= \delta(r) \\ \delta(r) &= \delta(-r)\end{aligned}\tag{56}$$

მაშინ (55) მეორე წარმოებული იქნება:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{d}{dr} \frac{df}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{df}{dz} sign(r) \right) = \frac{d^2 f}{dz^2} + 2\delta(r) \frac{df}{dz}\tag{57}$$

იმის გათვალისწინებით რომ $sign(r)' = 2\delta(r)$, $\delta(r)sign(r) = \delta(r)$ და $sign(r)^2 = 1$.

7.3 ექსპონენტის გასაშუალოება

გასაშუალოების თავში განიხილება (14) ფორმულა, რომლის მიღებაც ადვილია. გავიხსენოთ ექსპონენტის მწკრივად წარმოდგენა:

$$e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}\tag{58}$$

სინუსი მას უზის არგუმენტად, რადგან მწკრივი თანაბრად კრებადია, შეგვიძლია წევრ-წევრად ინტეგრება და გაწარმოება, ანუ თუ განვიხილავთ:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{1}{2\pi} \sum_n \frac{\int_0^{2\pi} x^n dx}{n!}\tag{59}$$

თუ გავიხსენებთ ცნობილ ფორმულას:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(x)^n dx &= 2\pi \frac{n!}{2^n (\frac{n!}{2})^2}, n = 2k \\ \int_0^{2\pi} \sin(x)^n dx &= 0, n = 2k + 1\end{aligned}\tag{60}$$

სადაც k მთელია. თუ მოცემულ ფორმულას ჩავსვამთ (59)-სა და (14)-ში მივიღებთ:

$$\langle e^{D \sin(x)} \rangle = \sum_{n=2k} \frac{D^n \frac{n!}{2^n (\frac{n!}{2})^2}}{n!} = \sum_n \frac{D^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \equiv I_0(D)\tag{61}$$

8 ლიტერატურა

- [1] ჯ. ჩქარეული ლექციები სპეციალურ და ზოგად ფარდობითობის თეორიაში;
Review of Particle Physics J. Beringer et al. (PDG), Phys. Rev. D **D 86** (2012) 010001;
M. Gogberashvili arXiv: hep-th/0203254
- [2] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B 429** (1998) 263, arXiv: hep-ph/9803315;
I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B 436** (1998) 257, arXiv: hep-ph/9804398.
- [3] V. Rubakov, Physics Letters **B 125** (1983) 136.
- [4] M. Gogberashvili, Int. J. Mod. Phys. **D 11** (2002) 1635, arXiv: hep-ph/9812296; Mod. Phys. Lett. **A 14** (1999) 2025, arXiv: hep-ph/9904383;
L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370, arXiv: hep-ph/9905221; Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690, arXiv: hep-th/9906064.
- [5] M. Gogberashvili, Int.J.Mod.Phys. **D11** (2002) 1635, arXiv: hep-ph/9812296.
- [6] M. Gogberashvili and D. Singleton, Mod. Phys. Lett. **A 25** (2010) 2131, arXiv: 0904.2828 [hep-th];
M. Gogberashvili, P. Midodashvili and L. Midodashvili, Phys. Lett. **B 702** (2011) 276, arXiv: 1105.1701 [hep-th];
M. Gogberashvili, P. Midodashvili and L. Midodashvili, Phys. Lett. **B 707** (2012) 169, arXiv: 1105.1866 [hep-th];
M. Gogberashvili, P. Midodashvili and L. Midodashvili, Int. J. Mod. Phys. **D 21** (2012) 1250081, arXiv: 1209.3815 [hep-th];
M. Gogberashvili, JHEP **09** (2012) 056, arXiv: 1204.2448 [hep-th].
- [7] M. Gogberashvili, P. Midodashvili and L. Midodashvili, Int. J. Mod. Phys. **D 21** (2012) 1250081, arXiv: 1209.3815 [hep-th];
M. Gogberashvili, O. Sakhashvili and G. Tukhashvili, Mod. Phys. Lett. **A 28** (2013) 1350092, arXiv: 1304.6079 [hep-th].
- [8] M. Gogberashvili, G. Tukhashvili arXiv:1308.5840 [hep-th]

- [9] M. Gogberashvili, P. Midodashvili and G. Tukhashvili, Gen. Rel. Grav. **46** (2014) 1697, arXiv: 1310.5696 [gr-qc].
- [10] M. Gogberashvili, A. Herrera-Aguilar, D. Malagon-Morejon, R. Rigel Mora-Luna Phys. Let. **725**, Issues 4–5, (208) arXiv: 1202.1608 [hep-th];
M. Gogberashvili, A. Herrera-Aguilar, D. Malagon-Morejon, R. Rigel Mora-Luna U. Nucamendi Phys. Rev. **D87** (2013) 084059 arXiv:1201.4569 [hep-th].
- [11] O. Sakhelashvili, IJTP: 53, **6** (2014), Page 1940, arXiv: 1311.1030 [gr-qc].
- [12] L.J.S. Sousa, J.E.G. Silva and C.A.S. Almeida, arXiv: 1209.2727 [hep-th];
P. Midodashvili, IJTP 53, **4**, (1174) arXiv: 1211.0206 [hep-th].
- [13] M. Gutperle and A. Strominger, JHEP **0204** (2002) 018, arXiv: hep-th/0202210;
M. Kruczenski, R.C. Myers and A.W. Peet, JHEP **0205** (2002) 039, arXiv: hep-th/0204144;
V.D. Ivashchuk and D. Singleton, JHEP **0410** (2004) 061, arXiv: hep-th/0407224;
C.P. Burgess, F. Quevedo, R. Rabadan, G. Tasinato and I. Zavala, JCAP **0402** (2004) 008, arXiv: hep-th/0310122.