

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და
საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტი

მაღალი რიგის სქემები ექვსკუთხა ბადეზე წრფივი ადვექციის განტოლებისათვის

ნატალია ნებულიშვილი

ხელმძღვანელი: თსუ-ს პროფესორი რამაზ ბოჭორიშვილი

ანოტაცია.....	2
ABSTRACT	2
შესავალი.....	3
ადვექციის განტოლება.....	4
ექვსკუთხა ბადე	4
მიურას სქემა	5
დივერგენციის ტესტირება მიურას სქემის გამოყენებით.....	6
დროში ინტეგრება	6
ელიერის ცხადი სქემა	6
რუნგე-კუტას მესამე რიგის სქემა.....	7
SSP მეოთხე რიგის სქემა.....	8
სქემების შედარება ტესტირების შედეგებზე დაყრდნობით	10
ახალი სქემები	11
ახალი სქემა მიმართული სხვაობებით.....	14
<i>სქემის აპრიორული შეფასება მაქსიმუმის პრინციპის გამოყენებით.....</i>	<i>15</i>
<i>სქემის კრებადობა</i>	<i>16</i>
ახალი სქემა ბარიცენტრული გაწარმოებით	17
დანართი	18
გამოყენებული ლიტერატურა:.....	21

ანოტაცია

საბაკალავრო ნაშრომი ეხება მაღალი რიგის სქემებს ექვსკუთხა ბადეზე წრფივი ადვექციის განტოლებისათვის. წინამდებარე ნაშრომში აგებული იქნება ექვსკუთხა ბადე, გამოყენებულია მიურას სქემა და ორი ახალი სქემა დივერგენციის დასათვლელად. ახალი სქემებიდან პირველისთვის გამოყვანილია აპრიორული შეფასება და დამტკიცებულია კრებადობა. მეორე სქემის აგებისთვის გამოყენებულია ბარიცენტრული გაწარმოების ფორმულა. ორივე სქემის ასაგებად მიურას სქემისგან განსხვავებით გამოყენებულია მიმართული წარმოებულები. დროში ინტეგრებისათვის ნაშრომი მოიცავს რამდენიმე ცნობილი სქემას: ეილერის ცხად, რუნგე-კუტას 3-ეტაპიან და მე-4 რიგის 5-ეტაპიანი SSP სქემებს. ყოველივე ამას თან ახლავს პროგრამული უზრუნველყოფა და ტესტირების შედეგები დანართის სახით.

Abstract

Bachelor's thesis is about high order schemes for linear advection equation on hexagonal grid. There is constructed hexagonal mesh, Miura's scheme and two new schemes are used for divergence calculation. For the first new scheme, there are a priori estimation and convergence. It is used barycentric numerical differentiation formula for the second scheme. Distinguish from Miura's scheme directional derivatives are used for constructing both schemes. For integration in time the thesis includes several classical methods: Euler, Runge-Kutta and 4-th order SSP methods. The thesis also covers software implementation and test results as an appendix.

შესავალი

ინჟინერიაში, ფიზიკასა და დედამიწის შემსწავლელ მეცნიერებებში ადვექცია არის სუბსტანციის ტრანსპორტული მექანიზმი ან კონსერვაცია ნაკადის მოძრაობის შედეგად. ადვექციის მაგალითებია: დამაბინძურებელი ნივთიერებების ტრანსპორტირება ან მდინარის ნაკადის მიერ შლამის გადატანა. ნაკადის ადგილას იგულისხმება ნებისმიერი ნივთიერება, რომელიც შეიცავს თერმულ ენერგიას. მაგალითად: წყალი ან ჰაერი.

ადვექციისას ნაკადს გადააქვს რაიმე შენახული რაოდენობა ან ნივთიერება მოცულობის ან მასის მოძრაობით. ნაკადის მოძრაობა მათემატიკურად აღიწერება ვექტორული ველით და ტრანსპორტირებული ნივთიერება სკალარული ველით, რაც გვიჩვენებს მის განაწილებას სივრცეში. ადვექცია არ მოიცავს სუბსტანციის ტრანსპორტირებას მოლეკულური დიფუზიით.

მეტეოროლოგიასა და ფიზიკურ ოკეანეოგრაფიაში, ადვექცია ხშირად მიუთითებს ატმოსფეროს ან ოკეანის ზოგიერთი თვისების გადატანას, როგორცაა მაგალითად: სითბო, ტენიანობა, სიმლაშე და ა.შ.

ექვსკუთხა ბადე გამოიყენება ატმოსფეროს მათემატიკური მოდელების რიცხვით სიმულაციებში. ბევრი მეცნიერი მუშაობდა ექვსკუთხა ბადეზე რიცხვით სქემებზე, მათ შორის: Thuburn, Sun და სხვანი. თუმცა მაღალი რიგის სქემები თითქმის არ გამოჩენილა ექვსკუთხა ბადეზე. ნაშრომი სწორედ ამ პრობლემის გადაწყვეტას ეხება.

ადვექციის განტოლება

ადვექციის განტოლება წარმოადგენს კერძოწარმოებულთან დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც აღწერს შენახული სკალარული ველის მოძრობას, რომელიც მიიღება ცნობილი სიჩქარის ვექტორული ველის მიერ სკალარული ველის ადვექციით. ადვექციის ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

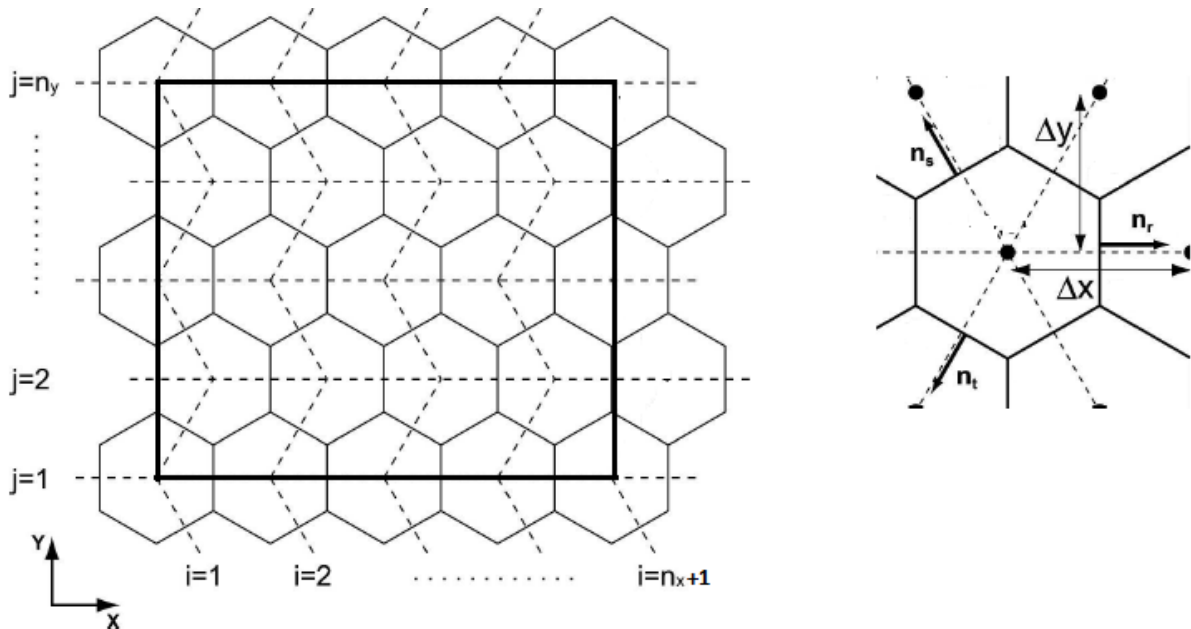
$$\mathbf{v} \cdot \nabla = \mathbf{v}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad \vec{v} = (u, v).$$

ადვექციის განტოლებას კი საბოლოოდ ექნება სახე:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(f \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (1)$$

ექვსკუთხე ბადე

ბადე წარმოადგენს ექვსკუთხედედების ერთობლიბას, სადაც თითოეული მათგანი წესიერი ექვსკუთხედეა. მთელი ბადე შემოსაზღვრულია მართკუთხედით და უჯრები გადანომრილია შესაბამისად. როგორც სურათზე ჩანს, გვაქვს ერთეულოვანი ვექტორები $\mathbf{n}_r = (1, 0)$, $\mathbf{n}_s = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ და $\mathbf{n}_t = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.



(ნახ.1)

მიურას სქემა

ადვექციის განტოლების ამოსახსნელად მიურამ შემოგვთავაზა შემდეგი სქემა:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{v})|_{P_0} \approx \frac{l}{2A} [(a_6\tilde{v}_6 + a_1\tilde{v}_1 - a_3\tilde{v}_3 - a_4\tilde{v}_4) \cdot \mathbf{n}_r + (a_2\tilde{v}_2 + a_3\tilde{v}_3 - a_5\tilde{v}_5 - a_6\tilde{v}_6) \cdot \mathbf{n}_s + (a_4\tilde{v}_4 + a_5\tilde{v}_5 - a_1\tilde{v}_1 - a_2\tilde{v}_2) \cdot \mathbf{n}_l].$$

სადაც $l = \Delta x / \sqrt{3}$ წარმოადგენს ექვსკუთხედის პერიმეტრს, ხოლო $A = \sqrt{3}(\Delta x)^2 / 2$ კი ფართობს.

შესაბამისად

$$\tilde{v}_n = \frac{3}{2}\tilde{v}'_n - \frac{1}{2}\tilde{v}''_n.$$

$$\tilde{v}'_n = v_n,$$

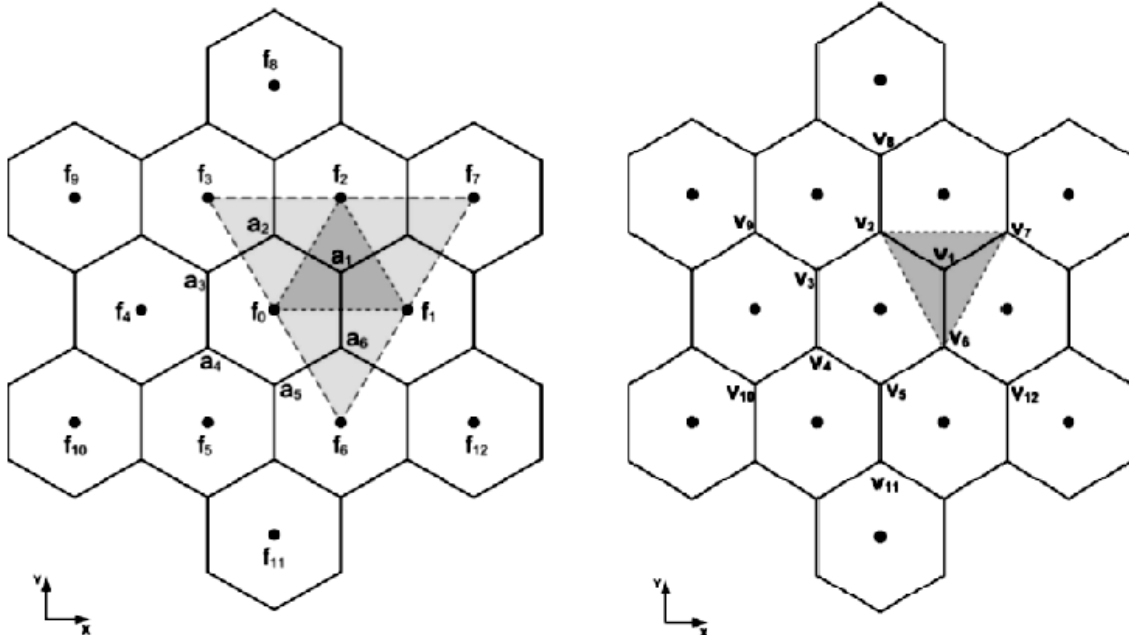
$$\tilde{v}''_n = \frac{v_{1+\text{mod}(n,6)} + v_{1+\text{mod}(n+4,6)} + v_{n+6}}{3}$$

$$a_n = \frac{3}{2}a'_n - \frac{1}{2}a''_n.$$

$$a'_n = \frac{f_0 + f_n + f_{1+\text{mod}(n,6)}}{3},$$

$$a''_n = \frac{f_{1+\text{mod}(n+1,6)} + f_{1+\text{mod}(n+4,6)} + f_{n+6}}{3}.$$

თუ დავაკვირდებით გამოსახულებებს, მივხვდებით, რომ დივერგენციის დასათვლელად თითოეულ წერტილში ვიყენებთ გარშემო 13 წერტილს შემდეგი სახით:



დივერგენციის ტესტირება მიურას სქემის გამოყენებით

ექსპერიმენტების რეალური განხორციელებისას (ნახ.1)-ზე მოცემულ ზადეს სჭირდება გაფართოება (x ღერძის მიმართ ემატება 4 შრე და y ღერძის მიმართ ემატება 4 შრე), რომ საჭირო წერტილებში დავთვალოთ დივერგენცია. სხვადასხვა ექსპერიმენტის შედეგად მიურას სქემის გამოყენებით დივერგენციის დათვლისას მივიღეთ შემდეგი შედეგები:

f	v	მეორეორმა	უსასრულობანორმა
1	(x,y)	1,10399E-15	2,22045E-15
1	(x ² ,y ²)	1,06698E-15	2,22045E-15
1	(x ³ /3,y ³ /3)	3,95916E-16	7,77156E-16
1	(xy,xy)	5,95E-16	1,55E-15
x	(y ² ,xy)	3,52767E-03	3,33333E-03
x/3	(x ² ,1)	2,35178E-03	2,22222E-03
xy	(y,1)	3,52767E-03	3,33333E-03
xy	(y,x)	7,05534E-03	6,66667E-03
x ³ /3+y ³ /3	(1,1)	4,14E-16	8,88E-16
y ² /3	(y,y)	0,00235178	2,22222E-03

მიღებული შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ როდესაც საქმე გვაქვს ხარისხის გაყოფასთან f-სა და v-ს კომპონენტებს შორის, მიურას სქემის ცდომილება იზრდება.

დროში ინტეგრება

დროში ინტეგრებისთვის გამოვიყენეთ რამდენიმე კლასიკური სქემა: ეილერის ცხადი, რუნგე-კუტას მესამე რიგის სიზუსტისა და მეოთხე რიგის 5 ეტაპიანი SSP სქემა. ცხადია,

თითოეულ მათგანში მოთხოვნილია, რომ დაკმაყოფილდეს კურანტის პირობა: $\frac{u\Delta t}{\Delta x} + \frac{v\Delta t}{\Delta y} < 1$

ეილერის ცხადი სქემა

ეილერის ცხად სქემას (1) განტოლების შემთხვევაში ექნება შემდეგი სახე:

$f = f_0 - \tau \operatorname{div}(fv)$, სადაც დროის თითოეულ ბიჯზე $\operatorname{div}(fv)$ დათვლილია მიურას სქემის გამოყენებით. სხვადასხვა ფუნქციებზე პროგრამისთვის ტესტს აქვს შემდეგი სახე:

საწყისი წერტილი (1,1), სივრცითი ბიჯი 0.1, წერტილების რაოდენობა 10x10, საწყისი დრო 0.001, დროითი ბიჯი 0.001, საბოლოო დრო 0.01.

f	v	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
1	(1,1)	0.0331438	0.0917768
$(\exp(1/(x+t)))/(x*x)$	$(-x*x,0)$	0.0553461	0.20474
$\exp(t)$	$(-x,0)$	0.0360161	0.135122
$\exp(t)$	$(0,-y)$	0.035898	0.105882
x	(0,1)	0.037159	0.11269
y	(1,0)	0.0317888	0.113313

შემდეგ ტესტებზე, კურანტის პირობის შესასრულებლად საჭირო გახდა დროითი ბიჯის შემცირება 0.0001-მდე, დანარჩენი კი დარჩა იგივე:

f	v	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
xt	$(-x/2t,t)$	0.0263572	0.0667579
yt	$(t,-y/2t)$	0.0189955	0.0338615

რუნგე-კუტას მესამე რიგის სქემა

რუნგე კუტას მესამე რიგის ცხად სქემას (1) სისტემისთვის ექნება შემდეგი სახე:

$$k_1 = -\text{div}(t, f_0 v_0)$$

$$k_2 = -\text{div}\left(t + \frac{1}{3}\tau, (f_0 + \frac{1}{3}\tau k_1)\right)$$

$$k_3 = -\text{div}\left(t + \frac{2}{3}\tau, (f_0 + \frac{2}{3}\tau k_2)\right)$$

$$f = f_0 + \tau\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3\right)$$

აღსანიშნავია, რომ დივერგენცია ყველგან ითვლება მიურას სქემის გამოყენებით.

ეილერის სქემისთვის აღებული ტესტები გავიმეორეთ რუნგე-კუტას სქემისთვისაც.

საწყისი წერტილი (1,1), სივრცითი ბიჯი 0.1, წერტილების რაოდენობა 10x10, საწყისი დრო 0.001, დროითი ბიჯი 0.001, საბოლოო დრო 0.01.

f	v	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
1	(1,1)	0.036244	0.100544
$(\exp(1/(x+t)))/(x*x)$	$(-x*x,0)$	0.0605056	0.224203
$\exp(t)$	$(-x,0)$	0.0393928	0.147385

მეოთხე რიგის 5 ეტაპიანი სქემისთვის მოცემული ცხრილები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

0					
0.39175	0.39175				
0.58608	0.21767	0.36841			
0.47454	0.082692	0.13996	0.25189		
0.93501	0.067966	0.11503	0.20703	0.54497	
	0.14681	0.24848	0.10426	0.27444	0.22601

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.44437 & 0.55563 \\ 0.6201 & 0 & 0.3799 \\ 0.17808 & 0 & 0 & 0.82192 \\ 0.0081647 & 0 & 0.51723 & 0.13374 & 0.34086 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0.39175 \\ 0 & 0.36841 \\ 0 & 0 & 0.25189 \\ 0 & 0 & 0 & 0.54497 \\ 0 & 0 & 0 & 0.088679 & 0.22601 \end{bmatrix}$$

ტესტირების შედეგები:

F	v	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
1	(1,1)	0.0372784	0.103384
$(\exp(1/(x+t)))/(x*x)$	$(-x*x,0)$	0.0622067	0.230528
$\exp(t)$	$(-x,0)$	0.040519	0.151574
$\exp(t)$	$(0,-y)$	0.0403915	0.119292
X	(0,1)	0.0417965	0.126498
Y	(1,0)	0.0357555	0.127505

(ცხრ. 3)

დროითი ბიჯი 0.00001;

F	v	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
Xt	$(-x/2t,t)$	0.0172796	0.0271265
Yt	$(t,-y/2t)$	0.0167853	0.0217434

(ცხრ.4)

სქემების შედარება ტესტირების შედეგებზე დაყრდნობით

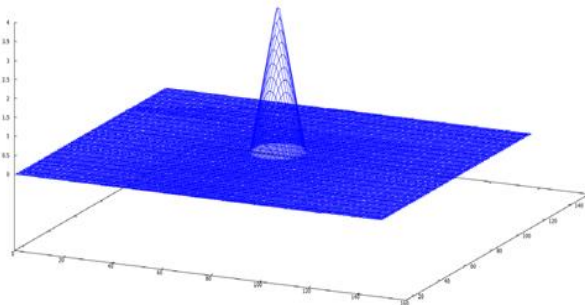
მიურას სქემისთვის ერთ-ერთ ტესტს წარმოადგენდა კონუსის ერთხელ დატრიალება. მოცემულ შემთხვევაში ბადის წერტილების რაოდენობა არის 150x100, კონუსის ცენტრი არის (50,50) წერტილში და სიმაღლე არის 4. კონუსი დატრიალებულია მუდმივი კუთხური სიჩქარით $w = 0.1$. სიჩქარის კომპონენტები მოცემულია ბადის თითოეული უჯრედის წვეროებში შემდეგი სახით: $u = -w(y - y_0)$, $v = w(x - x_0)$. დროითი ბიჯი 0.04, საწყისი დრო 0, ხოლო საბოლოო დრო - 62.8.

მეთოდი	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
ეილერი	1.19845e+135	2.90669e+136
რუნგე	0.00257909	0.0338996
SSP	0.00406956	0.0465577

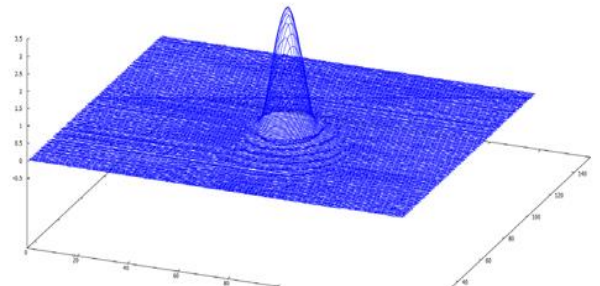
(ცხრ.5)

როგორც (ცხრ.5)-დან ჩანს, ეილერის სქემა ცდომილებას აგროვებს საკმაოდ რუნგე-კუტასა და SSP სქემებთან შედარებით, რაც მოსალოდნელი იყო. რაც შეეხება SSP-სა და რუნგე-კუტას სქემებს,(ცხრ.1)-(ცხრ.4)-დან შეიძლება დავასკვნათ, რომ პირველი მეორეს სჯობს იმ შემთხვევაში, როცა სიჩქარე ხდება დროზე დამოკიდებული. სხვა შემთხვევაში დიდ განსხვავებას არ გვამჩნევს.

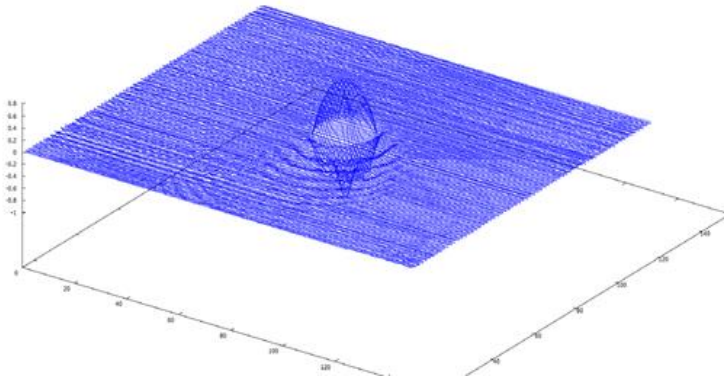
კონუსის ტრიალის შედეგად მიღებული გრაფიკები (მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად გამოყენებულია რუნგე-კუტას მეთოდი) :



ზუსტი ამონახსნი



მიახლოებითი ამონახსნი



ცდომილება

გრაფიკებიდან ჩანს, რომ ერთი დატრიალების შედეგად კონუსის წვეროს მნიშვნელობა შემცირდა 0.5-ით და შეშფოთებები შეიმჩნევა კონუსის გარეთაც.

ახალი სქემები

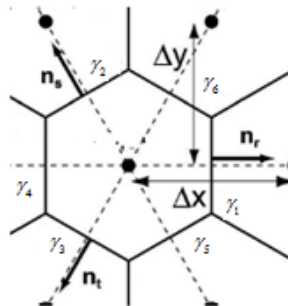
მიურას სქემისგან განსხვავებით, ახალი სქემები წარმოადგენს სასრული სხვაობების გამოყენებით ჩაწერილ სქემებს, რომელთა ჩასაწერადაც გამოვიყენეთ მიმართული წარმოებულები.

განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულება:

$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) dx dy$. გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial\Omega} \langle w, \vec{n} \rangle d\gamma \quad (2), \text{ სადაც } w = (w_1, w_2).$$

გავითვალისწინოთ, რომ ჩვენ სქემას ვაგებთ ექვსკუთხა ბადეზე და ექვსკუთხედს აქვს შემდეგი სახე:



დავაკვირდეთ წირების განლაგებას და მაშინ (2) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) dx dy &= \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial \gamma_1} \langle w, \vec{n}_r \rangle d\gamma_1 + \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial \gamma_2} \langle w, \vec{n}_s \rangle d\gamma_2 \\
+ \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial \gamma_3} \langle w, \vec{n}_t \rangle d\gamma_3 + \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial \gamma_4} \langle -w, \vec{n}_r \rangle d\gamma_4 & \quad (3) \\
+ \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial \gamma_5} \langle -w, \vec{n}_s \rangle d\gamma_5 + \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial \gamma_6} \langle -w, \vec{n}_t \rangle d\gamma_6.
\end{aligned}$$

ახლა დავაჯგუფოთ შესაბამისი წევრები (3)-დან და გვექნება:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) dx dy &= \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial \gamma_1} \langle w - w^{n_r}, \vec{n}_r \rangle d\gamma_1 & w^{n_r} &= w(t - n_r \Delta x), \\
+ \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial \gamma_2} \langle w - w^{n_s}, \vec{n}_s \rangle d\gamma_2 + \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial \gamma_3} \langle w - w^{n_t}, \vec{n}_t \rangle d\gamma_3; & \text{სადაც } w^{n_s} &= w(t - n_s \Delta x), \\
& & w^{n_t} &= w(t - n_t \Delta x).
\end{aligned} \quad (4)$$

(4) ტოლობის ორივე მხარეს გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \rightarrow 0$, ტოლობის მარცხენა მხარეს მივიღებთ:

$$\lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) = \operatorname{div}(w) \quad (5)$$

(4) ტოლობის მარჯვენა მხარეს კი ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
n_{r_1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} \frac{(w_1 - w_1^{n_r})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_1 + n_{r_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} \frac{(w_2 - w_2^{n_r})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_1 \\
+ n_{s_1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{(w_1 - w_1^{n_s})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_2 + n_{s_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{(w_2 - w_2^{n_s})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_2 & \quad (5) \\
+ n_{t_1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} \frac{(w_1 - w_1^{n_t})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_3 + n_{t_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} \frac{(w_2 - w_2^{n_t})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_3
\end{aligned}$$

განვიხილოთ ამ ჯამის პირველი ორი წევრი:

$$\begin{aligned}
& n_{r_1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} \frac{(w_1 - w_1^{n_r})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_1 + n_{r_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} \frac{(w_2 - w_2^{n_r})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_1 = \\
& = n_{r_1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta x \sqrt{3}} \int_{\gamma_1} \frac{(w_1 - w_1^{n_r})}{\Delta x} d\gamma_1 + n_{r_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} \frac{(w_2 - w_2^{n_r})}{\Delta x} d\gamma_1 = \\
& = \frac{2}{3} n_{r_1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3}}{\Delta x} \int_{t-\frac{\sqrt{3}}{2\Delta x}}^{t+\frac{\sqrt{3}}{2\Delta x}} \frac{(w_1 - w_1^{n_r})}{\Delta x} d\gamma_1 + \frac{2}{3} n_{r_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3}}{\Delta x} \int_{t-\frac{\sqrt{3}}{2\Delta x}}^{t+\frac{\sqrt{3}}{2\Delta x}} \frac{(w_2 - w_2^{n_r})}{\Delta x} d\gamma_2 = \quad (6) \\
& = \frac{2}{3} n_{r_1} \frac{\partial w_1}{\partial n_r} + \frac{2}{3} n_{r_2} \frac{\partial w_2}{\partial n_r} = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial n_r} \langle n_r, w \rangle
\end{aligned}$$

ანალოგიური გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ, რომ

$$n_{s_1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{(w_1 - w_1^{n_s})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_2 + n_{s_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} \frac{(w_2 - w_2^{n_s})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_2 = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial n_s} \langle n_s, w \rangle \quad (7)$$

და

$$n_{t_1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} \frac{(w_1 - w_1^{n_t})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_3 + n_{t_2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} \frac{(w_2 - w_2^{n_t})}{(\Delta x)^2 \sqrt{3}} d\gamma_3 = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial n_t} \langle n_t, w \rangle. \quad (8)$$

აღვნიშნოთ n_r, n_s, n_t შესაბამისად n_1, n_2, n_3 -ით.

აღნიშვნების გათვალისწინებით და (4) - (8)-დან მივიღებთ, რომ

$$\operatorname{div}(w) = \sum_{i=1}^3 \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial n_i} \langle n_i, w \rangle. \quad (9)$$

(9) გადავწეროთ (1) განტოლებისათვის მაშინ მივიღებთ რომ:

$$\operatorname{div}(fv) = \sum_{i=1}^3 \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial n_i} \langle n_i, fv \rangle \quad (10).$$

(10)-ის მარჯვენა მხარეში შევიტანოთ n_i -ის მნიშვნელობები და გამარტივებების შედეგად მივიღებთ შემდეგი სახის გამოსახულებას:

$$\operatorname{div}(fv) = \frac{\partial}{\partial n_1} \left(f \cdot \left(\frac{2}{3} u \right) \right) + \frac{\partial}{\partial n_2} \left(f \cdot \left(\frac{-1}{3} u + \frac{\sqrt{3}}{3} v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial n_3} \left(f \cdot \left(-\frac{1}{3} u - \frac{\sqrt{3}}{3} v \right) \right) \quad (11)$$

(11)-ის გათვალისწინებით (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_1} \left(f \cdot \left(\frac{2}{3} u \right) \right) + \frac{\partial}{\partial n_2} \left(f \cdot \left(\frac{-1}{3} u + \frac{\sqrt{3}}{3} v \right) \right) + \frac{\partial}{\partial n_3} \left(f \cdot \left(-\frac{1}{3} u - \frac{\sqrt{3}}{3} v \right) \right) = 0 \quad (12)$$

(12) განტოლებაში $\left(\frac{2}{3} u \right)$ აღვნიშნოთ w^1 -ით, $\left(\frac{-1}{3} u + \frac{\sqrt{3}}{3} v \right)$ - w^2 -ით, ხოლო $\left(-\frac{1}{3} u - \frac{\sqrt{3}}{3} v \right)$

w^3 -ით.

(12) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_1} (f \cdot w^1) + \frac{\partial}{\partial n_2} (f \cdot w^2) + \frac{\partial}{\partial n_3} (f \cdot w^3) = 0 \quad (13)$$

ახალი სქემა მიმართული სხვაობებით

გამოვიყენოთ ნაკადის გახლეჩა, შესაბამისად გვექნება შემდეგი:

$$fw^1 = fw^{1-} + fw^{1+}$$

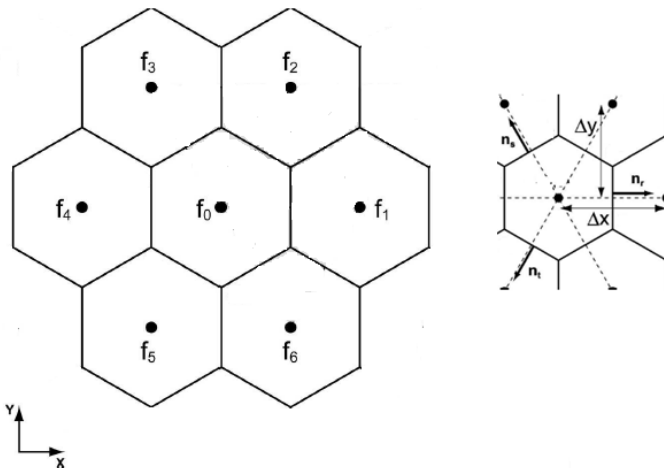
$$fw^2 = fw^{2-} + fw^{2+}$$

$$fw^3 = fw^{3-} + fw^{3+}$$

სივრცეში ინტეგრებისათვის გამოვიყენოთ მიმართული სხვაობები, ხოლო დროში ინტეგრებისათვის ეილერის ცხადი სქემა, მაშინ (13) განტოლებისათვის რიცხვით სქემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{f - f_0}{\tau} + \frac{f_0 w_0^{1+} - f_4 w_4^{1+}}{\Delta x} + \frac{f_1 w_1^{1-} - f_0 w_0^{1-}}{\Delta x} + \frac{f_0 w_0^{2+} - f_6 w_6^{2+}}{\Delta x} + \frac{f_3 w_3^{2-} - f_0 w_0^{2-}}{\Delta x} + \frac{f_0 w_0^{3+} - f_2 w_2^{3+}}{\Delta x} + \frac{f_5 w_5^{3-} - f_0 w_0^{3-}}{\Delta x} = 0 \quad (14), \text{ სადაც წერტილები შაბლონზე}$$

განლაგებულია შემდეგნაირად:



სქემის აპრიორული შეფასება მაქსიმუმის პრინციპის გამოყენებით

(14) სქემის შესაფასებლად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\vec{v}=(u,v)$ არის მუდმივი, კონკრეტულად $u = v = \text{const} < 0$, მაშინ (13) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\hat{f}-f_0}{\tau} + \frac{f_1 w_1^{1-} - f_0 w_0^{1-}}{\Delta x} + \frac{f_3 w_3^{2-} - f_0 w_0^{2-}}{\Delta x} + \frac{f_0 w_0^{3+} - f_2 w_2^{3+}}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{f} = f_0 - \frac{\tau}{\Delta x} (f_1 w_1^{1-} - f_0 w_0^{1-} + f_3 w_3^{2-} - f_0 w_0^{2-} + f_0 w_0^{3+} - f_2 w_2^{3+}). \quad (15)$$

დავაჯგუფოთ წევრები და შესაბამისად (15)-დან გვექნება:

$$\hat{f} = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta x} (-w_0^{1-} - w_0^{2-} + w_0^{3+})\right) f_0 - \frac{\tau}{\Delta x} (f_1 w_1^{1-} + f_3 w_3^{2-} - f_2 w_2^{3+}) \quad (16)$$

გავითვალისწინოთ თითოეული წევრის მნიშვნელობა და (16)-დან მივიღებთ:

$$\hat{f} = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta x} \left(-\frac{2}{3}c - \frac{\sqrt{3}-1}{3}c - \frac{\sqrt{3}+1}{3}c\right)\right) f_0 - \frac{\tau}{\Delta x} \left(\frac{2}{3}c f_1 + \frac{\sqrt{3}-1}{3}c f_3 + \frac{\sqrt{3}+1}{3}c f_2\right)$$

$$\Rightarrow \hat{f} = \left(1 - \frac{\tau}{\Delta x} \left(\frac{-2-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{3}c\right)\right) f_0 - \frac{\tau}{\Delta x} \left(\frac{2}{3}c f_1 + \frac{\sqrt{3}-1}{3}c f_3 + \frac{\sqrt{3}+1}{3}c f_2\right) \quad (17)$$

როცა $-1 < \frac{\tau}{\Delta x} \left(\frac{2+2\sqrt{3}}{3}\right) c < 0$, მაშინ $f_{max} = \max\{f_0, f_1, f_3, f_2\}$ და (17)-დან მივიღებთ, რომ $\hat{f} \leq \left(1 + \frac{\tau}{\Delta x} \left(\frac{2+2\sqrt{3}}{3}\right) c\right) f_{max} + \frac{\tau}{\Delta x} \left(-\frac{2}{3}c f_{max} - \frac{\sqrt{3}-1}{3}c f_{max} - \frac{\sqrt{3}+1}{3}c f_{max}\right)$

$$\Rightarrow \hat{f} \leq \left(1 + \frac{\tau}{\Delta x} \left(\frac{2+2\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{3}\right) c\right) f_{max} = f_{max}.$$

დანარჩენ შემთხვევებშიც კმაყოფილდება მაქსიმუმის პირობა $f_{max} = \max\{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.

თუმცა თითოეულ შემთხვევაში, დროითი ბიჯისა და სივრცითი ბიჯის დამოკიდებულებას ედება სხვადასხვა პირობა:

1. $u, v > 0, |u| < \sqrt{3}|v|$, მაშინ $\frac{\tau}{\Delta x} \cdot \frac{2 + 2 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot c < 1$.

2. $u, v < 0, |u| < \sqrt{3}|v|$, მაშინ $-1 < \frac{\tau}{\Delta x} \cdot \frac{2 + 2\sqrt{3}}{3} \cdot c$.
3. $u, v > 0, \frac{1}{3} \cdot u > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot v; u > 0, v < 0, \frac{1}{3} \cdot |u| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |v|$, მაშინ $\frac{4}{3} \cdot \frac{\tau}{\Delta x} < 1$.
4. $u, v < 0, \frac{1}{3} \cdot |u| > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |v|; u < 0, v > 0, \frac{1}{3} \cdot |u| > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |v|$, მაშინ $-1 < \frac{4}{3} \cdot \frac{\tau}{\Delta x} < 0$.
5. $u > 0, v < 0, \frac{1}{3} \cdot |u| \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |v|$, მაშინ $0 < \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau}{\Delta x} \cdot (2 - \sqrt{3} \cdot v) < 1$
6. $u < 0, v > 0, \frac{1}{3} \cdot |u| \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |v|$, მაშინ $\frac{\tau}{\Delta x} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot v - \frac{2}{3} \cdot u \right) < 1$.

(14) სქემის შესაფასებლად ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\vec{v}=(u,v)$ არაა მუდმივი. ამისათვის (14)-ის ჯამის მეორე და მესამე წევრები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$w_0^{1+} \frac{f_0 - f_4}{\Delta x} + w_0^{1-} \frac{f_1 - f_0}{\Delta x} + f_4 \frac{w_0^{1+} - w_4^{1+}}{\Delta x} + f_1 \frac{w_1^{1-} - w_0^{1-}}{\Delta x} \quad (18)$$

თუ (14)-ის დანარჩენ წევრებსაც გადავწერთ ანალოგიურად მაშინ მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$|f^{k+1}| \leq \max |f^k| + 3\tau \max (|w^-| + |w^+|) \max |f^k| \quad (19)$$

(19)-დან იმის გათვალისწინებით, რომ დროში ინტეგრებისათვის უნდა გავიაროთ N ბიჯი საბოლოო T დრომდე მისაღწევად, მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$|f^N| \leq \left(1 + \frac{3T \max (|w^-| + |w^+|)}{N\Delta x} \right) \max |f_0| = e^{\frac{3T \max (|w^-| + |w^+|)}{\Delta x}} \max |f_0| \quad (20).$$

სქემის კრებადობა

სქემის კრებადობისთვის (14) - ის მეორე და მესამე წევრები გადავწეროთ (18) სახით, ანალოგიური სახე მივცეთ ჯამის დანარჩენ წევრებსაც. ახლა (13) განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial w^1}{\partial n_1} + w^1 \frac{\partial f}{\partial n_1} + f \frac{\partial w^2}{\partial n_2} + w^2 \frac{\partial f}{\partial n_2} + f \frac{\partial w^3}{\partial n_3} + w^3 \frac{\partial f}{\partial n_3} = 0 \quad (21).$$

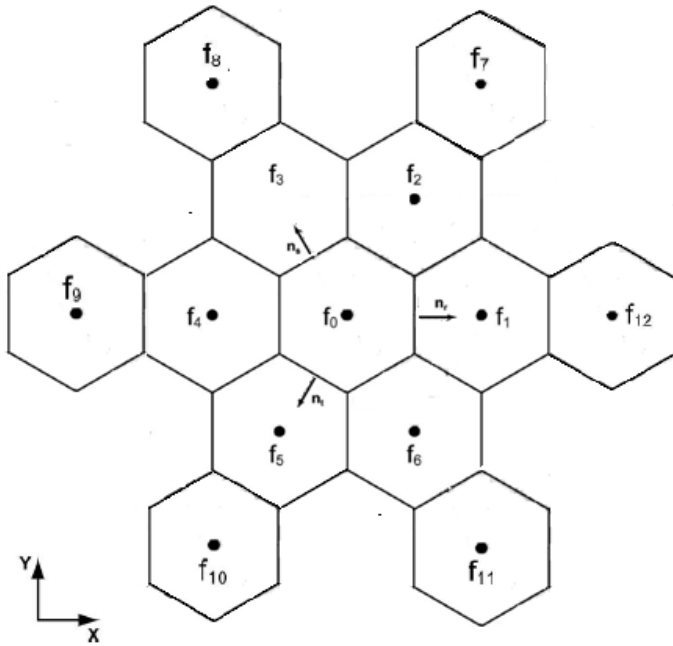
ახლა გავითვალისწინოთ (18), (21) და მივიღებთ, რომ

$$w_0^{1+} \frac{f_0 - f_4}{\Delta x} + w_0^{1-} \frac{f_1 - f_0}{\Delta x} + f_4 \frac{w_0^{1+} - w_4^{1+}}{\Delta x} + f_1 \frac{w_1^{1-} - w_0^{1-}}{\Delta x} = f \frac{\partial w^1}{\partial n_1} + w^1 \frac{\partial f}{\partial n_1} + O(\Delta x) \quad (22).$$

ანალოგიურად გვექნება (21)-ის დანარჩენი წევრებისთვისაც და საბოლოოდ მივირებთ პირველი რიგის კრებადობას.

ახალი სქემა ბარიცენტრული გაწარმოებით

მიურას სქემისგან განსხვავებით ახალი სქემა რეალურად მეოთხე რიგისაა (იხ. დანართი), რაც მოსალოდნელი იყო, რადგანაც ფუნქციას ვუახლოვდებით მეოთხე რიგის პოლინომით ყველა მიმართულებით. ამ შემთხვევაში შაბლონი განსხვავებულია ორივე სქემის შაბლონისაგან და აქვს შემდეგი სახე



7-წერტილიანი სქემის მსგავსად მოცემული სქემაც იყენებს მიმართულ წარმოებულებს და მათ დასათვლელად ლაგრანჟის ბარიცენტრული წარმოებულის ფორმულას.

დასკვნის სახით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მოცემული სქემა 1,107-ჯერ სწრაფად ითვლის ვიდრე მიურას სქემა და ამასთან ჩატარებული ტესტირების შედეგებზე დაყრდნობით, აქვს მცირე ცდომილება ვიდრე დანარჩენ 2 სქემას. თუმცა, 7-წერტილიანი სქემისგან განსხვავებით არაა მდგრადი.

დანართი

დიფერენცია:

		მიურას სქემა	
F	V	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
1	(x,y)	1,10399E-15	2,22045E-15
1	(x ² ,y ²)	1,06698E-15	2,22045E-15
1	(xy,xy)	5,95E-16	1,55E-15
X	(y ² ,xy)	3,52767E-03	3,33333E-03
x/3	(x ² ,1)	2,35178E-03	2,22222E-03
$\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}$	(1,1)	4,14E-16	8,88E-16
$\frac{y^2}{3}$	(y,y)	0,00235178	2,22222E-03

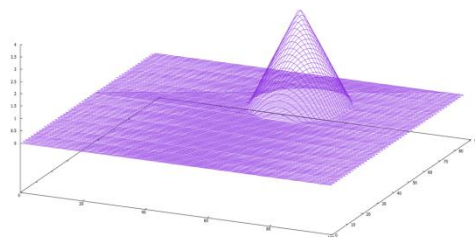
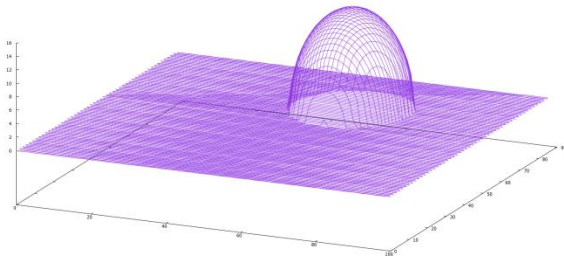
		ახალი მეოთხე რიგის სქემა	
f	V	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
1	(x,y)	2.21244E-015	6.21725E-015
1	(x ² ,y ²)	3.77972E-015	9.76996E-015
1	(xy,xy)	3.43646E-015	1.11022E-014
x	(y ² ,xy)	5.62365E-015	1.86517E-014
x/3	(x ² ,1)	2.11307E-015	7.10543E-015
$\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}$	(1,1)	4.44289E-015	1.42109E-014
$\frac{y^2}{3}$	(y,y)	1.25921E-015	2.22045E-015

ახალი პირველი რიგის სქემა			
f	V	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
1	(x,y)	8.00901e-16	2.22045e-015
1	(x ² ,y ²)	0.126559	0.153269
1	(xy,xy)	0.033541	0.05
x	(y ² ,xy)	0.0441376	0.155
x/3	(x ² ,1)	0.0377625	0.0641667
x ³ /3+y ³ /3	(1,1)	0.0865138	0.153257
y ² /3	(y,y)	0.0387419	0.065

კონუსის ერთხელ დატრიალება:

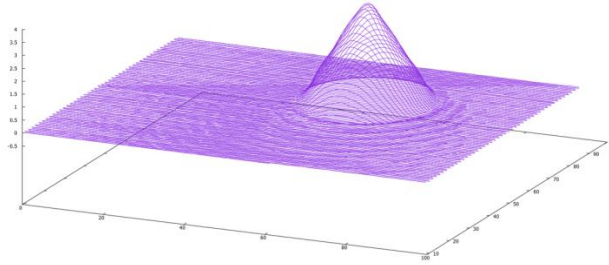
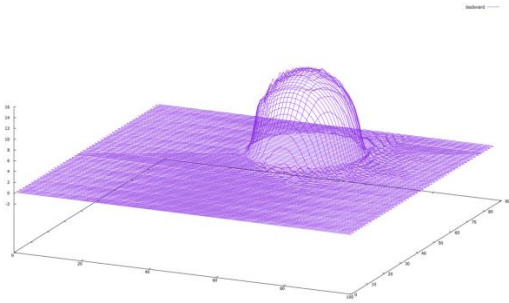
ინტეგრების მეთოდი	მიურას სქემა		ახალი მეოთხე რიგის სქემა		ახალი პირველი რიგის სქემა	
	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა	მეორე ნორმა	უსასრულობა ნორმა
ეილერი	1.19845e+135	2.90669e+136	9.45998e+088	2.23647e+090	0.108982	0.708194
რუნგე-კუტა	0.00257909	0.0338996	0.00182864	0.026965	0.108969	0.708177
SSP	0.00406956	0.0465577	0.00364422	0.037217	0.110728	0.732207

ზუსტი ამონახსნი:



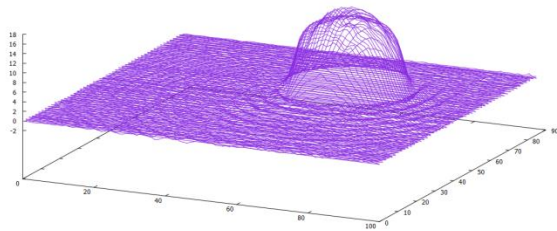
ერთი ბრუნის შემდეგ

მიურას სქემის შედეგები:

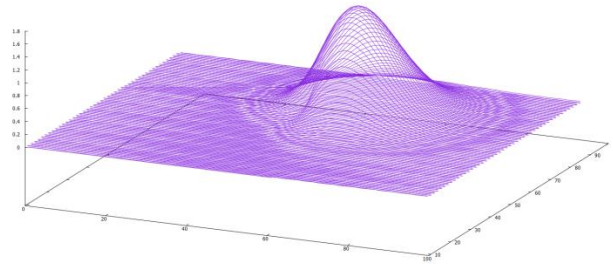


ახალი სქემების შედეგები:

13 - წერტილიანი სქემა



7- წერტილიანი სქემა



გამოყენებული ლიტერატურა:

HIROAKI MIURA 2007: Fourth-Order-Centered Finite-Volume Scheme for Regular Hexagonal Grids

Colin Barr Macdonald 2001: Constructing High-Order Runge-Kutta Methods with Embedded Strong-Stability-Preserving Pairs