ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკუტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სტუდენტის

თინა მგელაძის

საბაკალავრო ნაშრომი თემაზე:

„მოკვეთილი ექსპონენციალური განაწილების პარამეტრების შეფასება"

ხელმძღვანელი: გრიგოლ სოხაძე

თბილისი 2014

შესავალი

ნაშრომი ეძღვნება, მოკვეთილი ექსპონენციალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის სიმკვრივისთვის

$$f(x,\theta,\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & x\notin(\alpha,\beta]\\ \dfrac{\theta e^{-\theta x}}{e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta}} & x\in(\alpha,\beta]\end{cases}$$

θ,α,β პარამეტრების შეფასებას, სადაც $\alpha<\beta$.ნაშრომი დაყოფილი ოთხ ნაწილად. პირველ თავში წარმოდგენილია რაო კრამერის უტლობა. მეორე თავში განხილულია მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი, რომელიც უცნობი პარამეტრის შეფასების ერთ-ერთ ყველაზე მძლავრ მეთოდს წარმოადგენს. მეთოდს მესამე თავში განხილულია მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასების ზოგიერთი თვისებას. რაც შეეხება ბოლო თავს, აქ მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდით ხდება დასმული ამოცანის გადაჭრა θ პარამეტრისთვის, ხოლო ინტერვალის ბოლოების შეფასება დაკვირვებული სიდიდეების საშუალებით.

შინაარსი

1. რაო-კრამერის უტოლობა

ვთქვათ $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ შერჩევის წევრებისაგან შედგენილი ვექტორია, რომლისათვისაც არსებობს განაწილების სიმკვრივე $f(x,\theta)$.
ცხადია X ვექტორის განაწილებასაც გააჩნია განაწილების სიმკვრივე და ის ასე გამოითვლება:

$$L(x,\theta)=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)...f(x_n,\theta), \text{ სადაც } x=(x_1,x_2,...,x_n).$$

განსაზღვრა 1. $L(x,\theta)$-ს განხილულს, როგორც θ პარამეტრის ფუნქციას, ფიქსირებული x-სათვის, დასაჯერობის ფუნქცია ეწოდება.

ვთქვათ $\hat{\theta}_n=\psi(X_1,X_2,...,X_n)$ რაიმე შეფასებაა θ უცნობი პარამეტრისათვის. აღვნიშნოთ $g(\theta)=E\hat{\theta}_n=\int\limits_{R^n}\psi(x)L(x,\theta)dx$, სადაც $dx=dx_1dx_2...dx_n$. θ ჭეშმარიტი პარამეტრიდან მისი შეფასების $\hat{\theta}_n$-ს გადახრის ზომად ავიღოთ მისი დისპერსია $D\hat{\theta}_n$.

გამოსახულებას $I(\theta)=\int\limits_R\left(\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x,\theta)dx$ ეწოდება ფიშერის ინფორმაცია, რომელსაც გვაძლევს ერთი შერჩევა, θ პარამეტრისშესახებ.

თეორემა (რაო-კრამერის უტოლობა). ვთქვათ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) სიმრავლე $\{x: f(x,\theta)>0\}$ არ არის დამოკიდებული θ-საგან, ხოლო ფუნქცია $L(x,\theta)$ წარმოებადია θ არგუმენტით;
2) $\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{R^n}L(x,\theta)dx=\int\limits_{R^n}\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}dx$;
3) $\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{R^n}\psi(x)L(x,\theta)dx=\int\limits_{R^n}\psi(x)\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}dx$;
4) $I(\theta)=\int\limits_R\left(\frac{\partial\ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x,\theta)dx>0$

მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$D\hat{\theta}_n=E\left(\hat{\theta}_n-g_n(\theta)\right)^2\geq\frac{(g_n'(\theta))^2}{nI(\theta)}, \tag{1}$$

დამტკიცება. სამართლიანია ტოლობები

$$\int_{R^n} L(x,\theta)dx = 1 \quad \text{და} \quad E\hat{\theta}_n = g_n(\theta) = \int_{R^n} \psi(x)L(x,\theta)dx \tag{2}$$

2) და 3) პირობების გამო (2) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\int_{R^n} \frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}dx = 0, \quad g_n'(\theta) = \int_{R^n} \psi(x)\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}dx$$

ეს ტოლობები ასე გადავწეროთ

$$\int_{R^n} \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}L(x,\theta)dx = 0, \quad \int_{R^n} \psi(x)\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}L(x,\theta)dx = g_n'(\theta) \tag{3}$$

(3)-ს პირველი ტოლობა გავამრავლოთ $g_n(\theta)$-ზე და მეორეს გამოვაკლოთ. მივიღებთ

$$\int_{R} \left(\psi(x) - g_n(\theta)\right)\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}L(x,\theta)dx = g_n'(\theta) \tag{4}$$

ავიყვანოთ (4) ტოლობის ორივე მხარე კვადრატში და გამოვიყენოთ ე.წ.[1] კოში-შვარცის უტოლობა. მივიღებთ:

$$\left(g_n'(\theta)\right)^2 = \left(\int_{R^n} \left(\psi(x) - g_n(\theta)\right)\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}L(x,\theta)dx\right)^2 \le$$

$$\le \int_{R^n} \left(\psi(x) - g_n(\theta)\right)^2 L(x,\theta)dx \cdot \int_{R^n} \left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 L(x,\theta)dx.$$

მაგრამ

$$\int_{R^n} \left(\psi(x) - g_n(\theta)\right)^2 L(x,\theta)dx = E\left(\psi(X_1, X_2, ..., X_n) - g_n(\theta)\right)^2 = E\left(\hat{\theta}_n - E\hat{\theta}_n\right)^2 = D\hat{\theta}_n.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

---

[1] კოში-შვარცის უტოლობა ეწოდება შემდეგს: ვთქვათ $\varphi_1(x) \in L_2(\mu)$, $\varphi_2(x) \in L_2(\mu)$, ანუ $\int_{R^n} \varphi_1^2(x)\mu(dx) < \infty$ და, $\int_{R^n} \varphi_2^2(x)\mu(dx) < \infty$ მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას $\left(\int_{R^n} \varphi_1(x)\varphi_2(x)\mu(dx)\right)^2 \le \int_{R^n} \varphi_1^2(x)\mu(dx) \cdot \int_{R^n} \varphi_2^2(x)\mu(dx)$. ჩვენს შემთხვევაში $\mu(dx) = L(x,\theta)dx$

$$\int_{R^n} \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} L(x,\theta)dx = I_n(\theta).$$

მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\left(g_n'(\theta)\right)^2 \le D(\hat{\theta}_n)\cdot I_n(\theta)$$

საიდანაც მივიღებთ

$$D\hat{\theta}_n \ge \frac{\left(g_n'(\theta)\right)^2}{I_n(\theta)}.$$

თეორემის დასამტკიცებლად დაგვრჩენია ვაჩვენოთ, რომ $I_n(\theta) = nI(\theta)$. მართლაც, პირობის თანახმად,

$$\int_{R^n} \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} L(x,\theta)dx = 0,$$

ამიტომ

$$I_n(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln L(X_1, X_2,..., X_n)}{\partial \theta}\right)^2 = D\frac{\partial \ln L(X_1, X_2,..., X_n)}{\partial \theta}.$$

დასაჯერობის ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად

$$\ln L(X_1, X_2,..., X_n) = \sum_{j=1}^{n} \ln f(X_j,\theta), \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \ln f(X_j,\theta)}{\partial \theta}.$$

აქედან დისპერსიის თვისების გამოყენებით მივიღებთ

$$D\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = nD\frac{\partial \ln f(X_1,\theta)}{\partial \theta} = n\left[E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2 - \left(E\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2\right] = nE\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2 =$$

$$= n\int_R \left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 f(x,\theta)dx = nI(\theta).$$

თეორემა დამტკიცებულია.#

შედეგი. ვთქვათ $\hat{\theta}_n$ ისეთი შეფასებაა, რომ $E\hat{\theta}_n = \theta$. მაშინ ცხადია $g_n(\theta) = 0$ და რაო-კრამერის უტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს

$$D\hat{\theta}_n \geq \frac{1}{nI(\theta)}.$$

რაო-კრამერის უტოლობა ჩვენ დავამტკიცეთ იმ შემთხვევისათვის, როცა განაწილების ფუნქცია აბსოლუტურად უწყვეტია. ანალოგიური თეორემა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცაშემთხვევითი სიდიდე დისკრეტულია.

ვთქვათ მოცემულია $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ შერჩევა დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისაგან და $P\{X_j = y_m\} = P_m(\theta)$, $m = 1,2,...,s$ ყოველი j-სათვის. რაო-კრამერის უტოლობა ამ შემთხვევისათვის ასეთ სახეს მიიღებს:

$$D\hat{\theta}_n \geq \frac{(g_n'(\theta))^2}{nI(\theta)}, \text{ სადაც } I(\theta) = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial \ln P_j(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 P_j(\theta).$$

2. განაწილების უცნობი პარამეტრის შეფასების მოძებნის მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი

“კარგი” შეფასების აგების ერთ-ერთი ყველაზე მძლავრი მეთოდია დასაჯერობის მაქსიმუმის მეთოდი.

ვთქვათ, მოცემულია n მოცულობის შერჩევა $X_1, X_2, ..., X_n$, რომელთა განაწილების ფუნქციაა $F(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$ - უცნობი პარამეტრია.

დავუშვათ $F(x,\theta)$ ეკუთვნის აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა კლასს. ე.ი. მას გააჩნია სიმკვრივე $f(x,\theta)$.

განსაზღვრა. ფუნქციას $L(x,\theta) = f(x_1,\theta) f(x_2,\theta)... f(x_n,\theta)$ θ-ს მიმართ, ყოველი ფიქსირებული $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$-თვის, ეწოდება დასაჯერობის ფუნქცია.

როცა $F(x,\theta)$ დისკრეტული ტიპისაა, მაშინ $L(x,\theta) = p_1^{m_1}(\theta)p_2^{m_2}(\theta)...p_s^{m_s}(\theta)$, როგორც θ-ს ფუნქციას ეწოდება დასაჯერობის ფუნქცია. აქ $p_k(\theta) = P\{X = x_k\}$, $k = 1,2,...,s$, ხოლო m_k არის x_k-ების რაოდენობა შერჩევაში.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ მნიშვნელოვანი თეორემა (დამტკიცება მოცემულია წიგნში Э. Лемман. Теория точечного оценивания. М. 1991. გვ. 363).

<u>თეორემა.</u> როცა $n \to \infty$, ყოველი $\theta \neq \theta_0$-სათვის,

$$P\{L(X,\theta_0) \geq L(X,\theta)\} = P\{f(X_1,\theta_0)...f(X_n,\theta_0) \geq f(X_1,\theta)...f(X_n,\theta)\} \to 1, \qquad (1)$$

სადაც θ_0 არის θ უცნობი პარამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა.

(1) ნიშნავს შემდეგს: დასაჯერობის ფუნქცია $L(X,\theta)$ θ პარამეტრის ჭეშმარიტ მნიშვნელობაზე $\theta = \theta_0$-ზე დიდი ალბათობით აღემატება $L(X,\theta)$-ს θ_0-საგან განსხვავებულ (იგულისხმება, რომ θ_0, როგორც მაქსიმუმის წერტილი – ერთადერთია) θ-ებისათვის. ეს თეორემა მიგვითითებს ვიპოვოთ θ-ს ისეთი $\hat{\theta}_n$ მნიშვნელობა, რომლისათვისაც $L(X,\theta)$ აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ე.ი. $L(X,\hat{\theta}_n) = \sup_{\theta\in\Theta} L(X,\theta)$.თუ ასეთი θ არსებობს, მაშინ მას უწოდებენ θ_0-ს შეფასებას მიღებულს დასაჯერობის ფუნქციის მაქსიმუმის მეთოდით, ან უფრო მარტივად, მას უწოდებენ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებას.

თუ $L(X,\theta)$ ფუნქცია θ-ს მიმართ წარმოებადია, მაშინ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება უნდა აკმაყოფილებდეს განტოლებას:

$$\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial \theta} = 0. \qquad (2)$$

(2) ექვივალენტურია შემდეგი განტოლების:

$$\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} = 0. \qquad (2')$$

(2) ან (2') ეწოდება მაქსიმალური დასაჯერობის განტოლება.

ვთქვათ, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_s)$, $s \geq 1$, მაშინ (2) ან (2') შეიცვლებაგანტოლებათასისტემით:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta_1} = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta_s} = 0 \end{cases} . \tag{3}$$

(3)-ს ეწოდება მაქსიმალური დასაჯერობის განტოლებათა სისტემა.

მაგალითი 1. ვთქვათ, მოცემულია შერჩევა ბინომური განაწილებიდან p წარმატების ალბათობით, რომელიც უცნობია, $0 < p < 1$. ამ შემთხვევაში $\theta = p$, ხოლო $\Theta = [0,1]$. ყოველი კონკრეტული რეალიზაცია წარმოადგენს ამ შემთხვევაში ერთებისა და ნულების რაიმე მიმდევრობას. ვთქვათ მოცემულია შერჩევა $X_1, X_2, ..., X_n$, მაშინ დასაჯერობის ფუნქცია იქნება

$$L(X, p) = p^{\nu_n}(1-p)^{n-\nu_n}, \ \nu_n = X_1 + ... + X_n .$$

შევადგინოთ დასაჯერობის განტოლება:

$$\frac{\partial L(X, p)}{\partial p} = 0 \text{ ან } \frac{\partial \ln L(X, p)}{\partial p} = 0 .$$

გვექნება

$$\ln L(X, p) = \nu_n \ln p + (n - \nu_n)\ln(1-p),$$

$$\frac{\partial \ln L(X, p)}{\partial p} = \frac{\nu_n}{p} - \frac{n-\nu_n}{1-p} = 0,$$

$$\nu_n(1-p) - p(n-\nu_n) = 0,$$

$$\nu_n - np = 0, \ \hat{p}_n = \frac{\nu_n}{n} . \ \#$$

მაგალითი 2. ვთქვათ მოცემულია შერჩევა $X_1, X_2, ..., X_n$ ნორმალური განაწილებიდან პარამეტრებით (θ_1, θ_2), $\theta_1 = a$, $\theta_2 = \sigma^2$. მ შემთხვევაში გვექნება განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(X,\theta_1,\theta_2}{\partial\theta_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(X,\theta_1,\theta_2)}{\theta_2} = 0 \end{cases}$$

სადაც

$$L(X,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta_2}} e^{-\frac{(X_1-\theta_1)^2}{2\theta_2}} \ldots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\theta_2}} e^{-\frac{(X_n-\theta_1)^2}{2\theta_2}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \left(\sqrt{\theta_2}\right)^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_k-\theta_1)^2}{\theta_2}}.$$

ამიტომ

$$\ln L(X,\theta_1,\theta_2) = \ln\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} - \frac{n}{2}\ln\theta_2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(X_k-\theta_1\right)^2}{\theta_2}.$$

შესაბამისად მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(X,\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} = -\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\left(X_j-\theta_1\right)^2}{2\theta_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(X,\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} = -\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\theta_2} + \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\left(X_j-\theta_1\right)^2}{2\theta_2^2} \end{cases} = 0.$$

ამ სისტემის ამონახსნს წარმოადგენს:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k = \overline{X}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2 = S^2.$$

უშუალოდ შეიძლება შემოწმდეს, რომ $\left(\overline{X},S^2\right)$ წყვილი ანიჭებს მაქსიმუმს დასაჯერობის $L(X,\theta)$ ფუნქციას. ამრიგად, შერჩევითი საშუალო და დისპერსია$\left(\overline{X},S^2\right)$ ყოფილა ნორმალური განაწილების ორგანზომილებიანი$\theta = \left(\theta_1,\theta_2\right)$პარამეტრის დასაჯერობის მაქსიმუმს შეფასება. #

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი იმისა, რომ დასაჯერობის ფუნქციას θ-ს მიმართ არ გააჩნდეს წარმოებული, მაგრამ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება არსებობდეს.

მაგალითი 3. ვთქვათ, მოცემულია შერჩევა $X_1, X_2, ..., X_n$, რომელთაც აქვთ თანაბარი განაწილება $(0,\theta)$ ინტერვალზე. ე.ი.

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,\theta] \\ \dfrac{1}{\theta}, & x \in [0,\theta] \end{cases}.$$

დასაჯერობის ფუნქცია იქნება:

$$L(X,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & \forall X_k \in [0,\theta] \\ 0, & X_k \notin [0,\theta] \end{cases}.$$

მაგრამ პირობა იმისა, რომ $X_k \in [0,\theta]$ ყველა k-სათვის ექვივალენტურია პირობისა $\max\limits_{1\le k\le n} X_k \le \theta$. ცხადია, რომ

$$L(X,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n}, & \max\limits_{1\le k\le n} X_k \le \theta \\ 0, & \max\limits_{1\le k\le n} X_k > \theta \end{cases}.$$

ცხადია, დასაჯერობის ფუნქცია მაქსიმუმს აღწევს $\theta = \max\limits_{1\le k\le n} X_k$ წერტილზე, სადაც ამ ფუნქციას არ გააჩნია წარმოებული.

ამგვარად, $[0,\theta]$ ინტერვალში თანაბარი განაწილებისათვის მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება ყოფილა მაქსიმალური რიგობრივი სტატისტიკა:

$$X_{(n)} = \max_{1\le k\le n} X_k. \ \#$$

თეორემა. ვთქვათ შესრულებულია რაო-კრამერის უტოლობის პირობები:

1) $L(X,\theta)$ წარმოებადია θ-ს მიმართ თითქმის ყველა x-ისათვის და სიმრავლე $E_\theta = \{x : f(x,\theta) > 0\}$ არ არის დამოკიდებული θ-სგან;

2) $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\displaystyle\int_{R^n} L(x,\theta)dx = \int_{R^n} \frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}dx$;

3) $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\displaystyle\int_{R^n} \psi(x)L(x,\theta)dx = \int_{R^n} \psi(x)\frac{\partial L(x,\theta0}{\partial\theta}dx$;

4) $I(\theta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x,\theta)dx > 0$.

თუ $\theta_n = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ θ პარამეტრის გადაუადგილებადი და ეფექტური შეფასებაა, მაშინ ის წარმოადგენს მაქსიმალური დასაჯერობის განტოლების ამონახსენს.

დამტკიცება. ვინაიდან $\theta_n = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ არის გადაუადგილებადი და ეფექტური შეფასება, ამიტომ რაო-კრამერის უტოლობაში

$$D\theta_n \geq \frac{1}{nI(\theta)} \tag{4}$$

მიიღწევა ტოლობა, მაგრამ აქ მიიღწევა ტოლობა იმ შემთხვევაში, როცა (4) უტოლობის დადგენისას გამოყენებულ კოში-შვარცის უტოლობაში მიიღწევა ტოლობა. ე.ი.

$$\int_{R^n} \left(T(x) - \theta\right) \frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} L(x,\theta) dx = 1$$

თოლობის მარცხენა მხარეში გამოყენებულ კოში-შვარცის უტოლობაში

$$1 \leq \int_{R^n} \left(T(x) - \theta\right)^2 L(x,\theta) dx \int_{R^n} \left(\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} \right)^2 L(x,\theta) dx \tag{5}$$

მიიღწევა ტოლობა. (5)-ში ტოლობას ექნება ადგილი თუ არსებობს C_1 და C_2 მუდმივებია, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$C_1 \left(T(X) - \theta\right) + C_2 \frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{6}$$

თითქმის აუცილებლად.

ვაჩვენოთ, რომ $C_1 \neq 0$ და $C_2 \neq 0$. მართლაც, ვთქვათ $C_1 = 0$ და $C_2 \neq 0$, მაშინ (6)-დან მივიღებთ $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} = 0$ თითქმის აუცილებლად. ეს შეუძლებელია, ვინაიდან

$$nI(\theta) = \int_{R^n} \left(\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} \right)^2 L(X,\theta) dx$$

და $I(\theta) > 0$ 4) პირობის ძალით. ამიტომ $C_1 \neq 0$. ვთქვათ $C_1 \neq 0$ და $C_2 = 0$, მაშინ (6)-დან მივიღებთ $T(X) = \theta$. ესეც შეუძლებელია, ვინაიდან შეფასება არ უნდა იყოს მუდმივი. ამგვარად, $C_1 \neq 0$ და $C_2 \neq 0$. (6) განტოლებაში θ-ს ნაცვლად ჩავსვათ $\theta_n = T(X_1, ..., X_n)$, მაშინ მიიღება, რომ

$$\left.\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_n=T(X_1,\dots,X_n)} = 0.$$

ე.ი. $\theta_n = T(X_1,\dots,X_n)$ ყოფილა მაქსიმალური დასაჯერობის განტოლების ამონახსნი. #

ექსპონენციალური განაწილებები. სტატისტიკაში მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ე.წ. ექსპონენციალური განაწილებები. $F(x,\theta)$-ს უწოდებენ ექსპონენციალური განაწილებას თუ მას გააჩნია განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x,\theta) = \exp\{A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)\}. \tag{7}$$

ჩვენთვის ცნობილი მრავალი განაწილება (7) ტიპისაა. მაგალითად, ნორმალური განაწილება პარამეტრებით (θ,σ^2), (a,θ^2) და ა.შ. ექსპონენციალური განაწილებისათვის

$$\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} = A'(\theta)\sum_{j=1}^{n} B(X_j) + nC'(\theta) = nA'(\theta)\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B(X_j) + \frac{C'(\theta)}{A'(\theta)}\right].$$

აღვნიშნოთ

$$T(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B(X_j),\ \ \tau(\theta) = -\frac{C'(\theta)}{A'(\theta)},\ \ a(\theta) = \frac{1}{nA'(\theta)}.$$

მაშინ ექსპონენციალური განაწილებისათვის კმაყოფილდება (6) ტოლობა:

$$T(X) - \tau(\theta 0 = a(\theta)\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}.$$

ამგვარად, $\tau(\theta)$ პარამეტრისათვის $T(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B(X_j)$ არის ეფექტური შეფასება.

თუ $f(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$, მაშინ $\tau(\theta) = 0$ და $B(x) = x$, ე.ი. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ არის θ-ს ეფექტური შეფასება.

3. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდის
ასიმპტოტიური თვისებები

ვთქვათ, X შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია განაწილების სიმკვრივე $f(x,\theta)$, სადაც $a \le \theta \le b$. შემოვიღოთ რეგულარობის შემდეგი თვისებები:

1^0. არსებობენ შემდეგი წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3}$, $\theta = \theta_0$ წერტილზე, სადაც θ_0 არის θ-ს ჭეშმარიტი მნიშვნელობა;

2^0. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\theta)dx$ ორჯერ დიფერენცირებადია ინტეგრალის ნიშნის შიგნით და შესაბამისად

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \theta} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} dx = 0;$$

3^0.
$$\left| \frac{\partial^3 \ln f}{\partial \theta^3} \right| \le H(x), \; a \le \theta \le b,$$

სადაც $H(x)$ ისეთია, რომ

$$\int_{\infty}^{\infty} H(x) f(x,\theta)dx \le M = const. < \infty;$$

4^0. $\theta = \theta_0$ ჭეშმარიტი მნიშვნელობისათვის

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta} \right)^2_{\theta=\theta_0} f(x,\theta_0)dx > 0.$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ, შესრულებულია $1^0 - 4^0$ რეგულარობის პირობები. მაშინ მაქსიმალური დასაჯერობის განტოლებას $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ აქვს ამონახსნი $\hat{\theta}_n$, რომელიც ძალდებული შეფასება პარამეტრის θ_0 ჭეშმარიტ იმ ნიშვნელობისათვის. გარდა ამისა, ამონახსნი არის ასიმპტოტიურად ნორმალური და ასიმპტოტიურად ეფექტური.

დამტკიცება. ცხადია

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \ln f(X_k, \theta)}{\partial \theta}, \tag{1}$$

სადაც $L(X,\theta) = \prod_{k=1}^{n} f(X_k, \theta)$. გავშალოთ $\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta}$ $\theta = \theta_0$ წერტილის მიდამოში ტეილორის მწკრივად. მივიღებთ:

$$\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta} = \left.\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} + (\theta-\theta_0)\left.\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} + \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)^2 \delta H(X_k), \tag{2}$$

სადაც $|\delta| \le 1$. გავამრავლოთ (1) $\frac{1}{n}$-ზე და გამოვიყენოთ (2). მივიღებთ

$$\frac{1}{n}\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = B_{0n} + (\theta-\theta_0)B_{1n} + \frac{1}{2}\delta(\theta-\theta_0)^2 B_{2n}, \tag{3}$$

სადაც $B_{0n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}$, $B_{1n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}$, $B_{2n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H(X_k)$.

განვიხილოთ ცალკე B_{0n}. ცხადია B_{0n} წარმოადგენს დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ $\left.\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta_0}\right|_{\theta=\theta_0}$, $k = 1,2,...,n$ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამს და

$$E\left.\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} f(x,\theta_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} dx = 0.$$

ხინჩინის თეორემის თანახმად $B_{0n} \overset{P}{\square} 0$, როცა $n \to \infty$.

ახლა განვიხილოთ B_{1n}. B_{1n}-იც წარმოადგენს $\left.\frac{\partial^2 \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}$, $k = 1,2,...,n$ დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამს. ამასთან

$$E\left.\frac{\partial^2 \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial^2 \ln f(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} f(x,\theta_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left.\left[\frac{\partial}{\partial \theta\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)}\right]\right|_{\theta=\theta_0} f(x,\theta_0)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial\theta} \right) \right] \Bigg|_{\theta=\theta_0} f(x,\theta_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \Bigg|_{\theta=\theta_0} f(x,\theta_0)dx -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial f}{\partial\theta} \right)^2 \Bigg|_{\theta=\theta_0} f(x,\theta_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \Bigg|_{\theta=\theta_2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial\theta} \right)^2_{\theta=\theta_0} f(x,\theta_0)dx =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial\theta} \right)^2_{\theta=\theta_0} f(x,\theta_0)dx = -I(\theta_0) .$$

ამგვარად, ხინჩინის თეორემის თანახმად $B_{1n} \overset{P}{\square} \; I(\theta_0)$, როცა $n \to \infty$.

და ბოლოს $B_{2n} \xrightarrow{P} EH(X) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f(x,\theta_0)dx \le M$.

ამგვარად, მივიღეთ, რომ

$$B_{0n} \xrightarrow{P} 0 , \; B_{1n} \xrightarrow{P} -I(\theta_0) , \; B_{2n} \xrightarrow{P} EH(X) \le M . \quad (4)$$

ვთქვათ, $h > 0$, $\varepsilon > 0$. (4)-ს თანახმად არსებობს ისეთი n_0, რომ, როცა $n \ge n_0$ ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობებს:

$$P\left\{ \left| B_{01} \right| \ge h^2 \right\} \le \frac{\varepsilon}{3}, \; P\left\{ B_{1n} \ge -\frac{I(\theta_0)}{2} \right\} \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ და } P\left\{ \left| B_{2n} \right| \ge 2M \right\} \le \frac{\varepsilon}{3}, \; M = const .$$

S_n-თ აღვნიშნოთ ხდომილება იმისა, რომ ადგილი აქვს ერთდროულად შემდეგ უტოლობებს: $\left| B_{0n} \right| < h^2$, $B_{1n} < \dfrac{I(\theta_0)}{2}$, $\left| B_{2n} \right| < 2M$. ე.ი.

$$S_n = \omega : \left| B_{0n} \right| < h^2, B_{1n} < \frac{I(\theta_0)}{2}, \left| B_{2n} \right| < 2M \; . \quad (5)$$

ცხადია, რომ

$$P\{S_n\} \ge 1 - \left(P\left\{ \left| B_{0n} \right| \ge h^2 \right\} + P\{ B_{1n} \ge -0{,}5 I(\theta_0) \} + P\left\{ \left| B_{2n} \right| \ge 2M \right\} \right).$$

(5)-ს გამოყენებით დავწერთ

$$P(S_n) \ge 1 - \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \right) = 1 - \varepsilon .$$

ე.ი.

$$P(S_n) \geq 1-\varepsilon \text{, როცა } n \geq n_0 . \tag{6}$$

ვთქვათ, $0 < h < \dfrac{I(\theta_0)}{2(M+1)}$. განვიხილოთ ინტერვალი $(\theta_0 - h, \theta_0 + h)$. (3) ტოლობაში ჩავსვათ $\theta = \theta_0 \pm h$. მივიღებთ

$$\frac{1}{n}\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = B_{0n} \pm B_{1n}h + \frac{1}{2}h^2 \delta B_{2n}, \ \omega \in S_n . \tag{7}$$

ამ (7) გამოსახულების ნიშანი დამოკიდებულია მეორე წევრზე.

მართლაც, ვთქვათ $\omega \in S_n$, მაშინ

$$\left| B_{0n} + \frac{1}{2}h^2 \delta B_{2n} \right| \leq h^2 + \frac{1}{2}h^2 2M = h^2(1+M) . \tag{8}$$

ვთქვათ $\theta = \theta_0 - h$, მაშინ

$$hB_{1n} > \frac{I(\theta_0)}{2}h$$

მაგრამ, ვინაიდან $0 < h < \dfrac{I(\theta_0)}{2(M+1)}, h \ (M+1) < \dfrac{I(\theta_0)}{2}$.

ამიტომ

$$hB_{1n} > h^2(1+M) . \tag{9}$$

მეორე მხრივ, (8)-ის ძალით

$$h^2(1+M) < B_{0n} + \frac{1}{2}\delta^2 h^2 B_{2n} < h^2(1+M) . \tag{10}$$

ე.ი. თუ შევადარებთ (9) და (10), დავასკვნით, რომ სამწევრს $B_{01} \quad hB_{1n} + \dfrac{1}{2}h^2 \delta B_{2n}$-ს აქვს LB_{1n}-ის ნიშანი (+).

ვთქვათ ახლა $\theta = \theta_0 + h$, მაშინ

$$hB_{1n} < -\frac{I(\theta_0)}{2}h \text{, როცა } \omega \in S_n .$$

$h(M+1) < \dfrac{I(\theta_0)}{2}$, ამიტომ

$$-h(M+1) > -\frac{I(\theta_0)}{2}.$$

ე.ი.

$$hB_{1n} < -h^2(1+M).$$

ამ შემთხვევაში განსახილავ სამწევრს აქვს ნიშანი (-), ეს $B_{1n}h$-ის ნიშანის. ამგვარად,

$$\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0-h} > 0 \text{ და } \left.\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0+h} < 0.$$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$ უწყვეტი ფუნქციაა და $[\theta_0 \quad h, \theta_0 + h]$ ინტერვალის ბოლოებზე ღებულობს საწინააღმდეგო ნიშნის მნიშვნელობებს. ამიტომ ის ამ ინტერვალის შიგნით ერთხელ მაინც გახდება ნულის ტოლი. ვთქვათ ერთ-ერთი ასეთი წერტილია $\theta = \hat{\theta}_n$, $\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}_n} = 0$. დამტკიცდა, რომ დასაჯერობის განტოლებას აქვს ამონახსნი (ერთთან ახლო ალბათობით).

ვაჩვენოთ ახლა, რომ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$, როცა $n \to \infty$. ცხადია, რომ $\theta_0 \quad h < \hat{\theta}_n < \theta_0 + h$, $1 \quad \varepsilon$-ზე მეტი ალბათობით:

$$P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta_0\right| < h\right\} \geq 1 - \varepsilon. \qquad (11)$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $\hat{\theta}_n$ ასიმპტოტიურად განაწილებულია ნორმალურად. ე.ი. როცა $n \square \infty$

$$P\left\{\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{\frac{1}{nI(\theta_0)}}} < \lambda\right\} \to \Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \qquad (12)$$

(12) ნიშნავს, რომ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება განაწილებულია ნორმალურად პარამეტრებით $\theta_0, \frac{1}{nI(\theta_0)}$.

ვინაიდან $\hat{\theta}_n$ არის მაქსიმალური დასაჯერობის განტოლების ფესვი, ამიტომ $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}=0$, ანუ

$$B_{0n}+(\hat{\theta}_n-\theta_0)B_{1n}+\frac{1}{2}(\hat{\theta}_n-\theta_0)^2\delta B_{2n}=0 .$$

აქედან

$$\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)\left[B_{1n}+\frac{1}{2}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)\delta B_{2n}\right]=-B_{0n} ,$$

$$\hat{\theta}_n-\theta_0=\frac{B_{0n}}{-B_{1n}-\frac{1}{2}\delta\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)B_{2n}}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}}{-B_{1n}-\frac{1}{2}\delta\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)B_{2n}} ,$$

$$\sqrt{nI(\theta_0)}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)=\frac{\frac{1}{\sqrt{nI(\theta_0)}}\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}}{\frac{-B_{1n}}{I(\theta_0)}-\frac{1}{2}\delta\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)\frac{B_{2n}}{I(\theta_0)}} . \tag{13}$$

განვიხილოთ (13)-ის მრიცხველი

$$\frac{1}{\sqrt{nI(\theta_0)}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta} . \tag{14}$$

(14) წარმოადგენს დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების ნორმირებულ ჯამს. ვინაიდან

$$E\left.\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}=0 \text{ და } D\left.\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)\right|_{\theta=\theta_0}=I(\theta_0) ,$$

ამიტომ ლინდებერგის თეორემის ძალით (14) ჯამი განაწილებულია ასიმპტოტიურად ნორმალურად პარამეტრებით $(0,1)$. (14)-ის მნიშვნელი მიისწრაფის ალბათობით 1-საკენ, რადგანაც როგორც ზემოთ ვნახეთ,

$B_{1n} \xrightarrow{P} -I(\theta_0)$, $B_{2n} \xrightarrow{P} EH(X_1) < M$, $\hat{\theta}_n \overset{P}{\square} \theta_0$. ამიტომ (14) გამოსახულების განაწილება მიისწრაფის ნორმალური განაწილებისაკენ პარამეტრებით (0,1)[2].

ახლა უნდა ვაჩვენოთ, რომ მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასება ასიმპტოტურად ეფექტურია. გავიხსენოთ ასიმპტოტური ეფექტურობის განსაზღვრა: ვთქვათ θ_n^* არის θ_0-ის რაიმე შეფასება და ის ასიმპტოტურად ნორმალურია პარამეტრებით $\left(\theta_0, \frac{\sigma^2(\theta_0)}{n}\right)$. ს იმას ნიშნავს, რომ როცა $n \square \infty$

$$P\left\{ \frac{\theta_n^* - \theta_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2(\theta_0)}{n}}} < \lambda \right\} \to \Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-u^2/2} du .$$

ასიმპტოტურად ეფექტურობა $e(\theta_n^*)$ განისაზღვრება ასე:

$$e(\theta_n^*) = \frac{\frac{1}{nI(\theta_0)}}{\frac{\sigma^2(\theta_0)}{n}} = \frac{1}{I(\theta_0)\sigma^2(\theta_0)} .$$

ჩვენს შემთხვევაში $\theta_n^* = \hat{\theta}_n$ და როგორც ვნახეთ $\hat{\theta}_n$ განაწილებულია ასიმპტოტურად ნორმალურად პარამეტრებით $\left(\theta_0, \frac{1}{nI(\theta_0)}\right)$, ე.ი. $\sigma^2(\theta_0) = \frac{1}{I(\theta_0)}$.

ესე იგი $e(\hat{\theta}_n) = 1$. #

[2]ჩვენ აქ გამოვიყენეთ შემდეგით ეორემა: თუ $F_{\xi_n}(x) \to F(x), \eta_n \xrightarrow{P} C = const$, მაშინ $F_{\xi_n/\eta_n}(x) \to F(Cx)$. ჩვენს შემთხვევაში ξ_n არის (13) წილადის მრიცხველი, ხოლო η_n ამ წილადის მნიშვნელი, $F(x) = \Phi(x)$, $C = 1$.

4. მოკვეთილი ექსპონენციალური განაწილების პარამეტრის შეფასება

ვთქვათ, X მოკვეთილი ექსპონენციალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა

$$f(x,\theta,\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & x\notin(\alpha,\beta]\\ \dfrac{\theta e^{-\theta x}}{e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta}} & x\in(\alpha,\beta]\end{cases} \tag{1}$$

განაწილების სიმკვრივით, სადაც $\alpha<\beta$ და α,β,θ უცნობი პარამეტრებია. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ამ პარამეტრების შეფასება. θ–ს შესაფასებლად გამოვიყენოთ მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი. დავუშვათ რომ $x_1,x_2,....x_n$ n მოცულობის შერჩევაა გენერალური ერთობლიობიდან, რომელსაც გააჩნია მოკვეთილი ექპონენციალური განაწილება და რომლის სიმკვრივე მოიცემა ფორმულით (1). შესაბამისი დასაჯერობის ფუნქცია აღვნიშნოთ $L(x,\theta,\alpha,\beta)$ ით. პირველ რიგში, ჩვენ უნდა დავადგინოთ ამ ფუნქციის სახე. ამისათვის გამოვიყენოთ შემდეგი:

ლემა 2.1

$$L(x,\theta,\alpha,\beta)=\theta^n(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-n}e^{-n\theta\bar{X}} \quad ,$$

სადაც $\bar{X}$ არის შერჩევის საშუალო.

დამტკიცება:

$$L(x,\theta,\alpha,\beta)=f(x_1,\theta,\alpha,\beta)...f(x_n,\theta,\alpha,\beta)=\theta e^{-\theta x_1}(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-1}...\theta e^{-\theta x_n}(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-1}=\theta^n e^{-\theta x_1}(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-n}e^{-n\theta\bar{X}}$$

როგორც ვიცით, θ-ს მოსაძებნათ რომელიც დასაჯერობის ფუნქციას ანიჭებს მაქსიმუმს, უნდა ამოიხსნას განტოლება:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x,\theta,\alpha,\beta)=0 \tag{2}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ ლემა 2.1-ს მაშინ მაქსიმალური დასაჯერობის ლოგარითმული ფუნქციიისთვის გვექნება:

$\ln L(x,\theta,\alpha,\beta)=\ln(\theta^n(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-n}e^{-n\theta\bar{X}})=n\ln\theta-n\ln(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})-n\theta\bar{X}$ აქედან გვაქვს:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x,\theta,\alpha,\beta)=\frac{n}{\theta}-\frac{n(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}-n\bar{X} \tag{3}$$

(2)-დან და (3) დან გვაქვს, რომ მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქციას აქვს სახე:

$$\frac{1}{\theta}-\frac{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}-\bar{X}=0 \qquad (4)$$

ჩვენ ქვევით მოვიყვანთ საკმარის პირობას ამ განტოლების ამოხსნისა და ერთადერთობისა.თუმცა , მანმადე ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ რამდენიმე დამხმარე თეორემა.

თეორემა

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}-\frac{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}-\bar{X}=\frac{\alpha+\beta}{2}-\bar{X}$$

დამტკიცება:

ცხადია, თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}-\frac{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}=\frac{\alpha+\beta}{2};$$

მართლაც გვაქვს:

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1}{\theta}-\frac{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}\right]=\lim_{\theta\to 0}\frac{\dfrac{e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta}}{\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha}}-\theta}{\dfrac{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})\theta}{\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha}}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta}-\theta(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{\theta(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\alpha e^{-\theta\alpha}+\beta e^{-\theta\beta}-\theta(\alpha^2 e^{-\theta\alpha}-\beta^2 e^{-\theta\beta})-(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{\theta(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})+e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(-\theta(-\beta^2 e^{-\theta\beta}+\alpha^2 e^{-\theta\alpha}))'}{(\theta(e^{-\theta\beta}-e^{-\theta\alpha})+(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})'}=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\theta(\beta^3 e^{-\theta\beta}-\alpha^3 e^{-\theta\alpha})-(-\beta^2 e^{-\theta\beta}+\alpha^2 e^{-\theta\alpha})}{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})+\theta(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})-\alpha e^{-\theta\alpha}+\beta e^{-\theta\beta}}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ როცა $\theta\to 0$ მაშინ $e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta}\to 0$.

ანალოგიური გზით მტკიცდება შემდეგი:

თეორემა 2.2

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}L(x,\theta,\alpha,\beta)=-\bar{X}$$

შევნიშნოთ, რომ დასაჯერობის ლოგარითმული ფუნქცია განსაზღვრულია და დიფერენცირებადია $(0;\infty)$ ღია ინტერვალში და $L(x,\theta,\alpha,\beta)$ –ს მაქსიმალური

მნიშვნელობა თუ ის არსებობს მიიღწევა სტაციონალურ θ^* წერტილში და არ მიიღწევა $(0;\infty)$–ს სასაზღვრო წერტილში.ყოველივე ზემოთ თქმულიდან თეორემა 2.1 და თეორემა 2.2-დან მარტივად მიიღება შემდეგი:

შედეგი 2.1 არსებობს $(0;\infty)$-ის სტაციონალური წერტილი θ^* ისეთი, რომ $\frac{\partial}{\partial\theta^*}L(x,\theta,\alpha,\beta)=0$, როცა $0<\bar{X}<\frac{\alpha+\beta}{2}$. ჩვენი შემდეგი მიზანია ვაჩვენოთ რომ სწორედ θ^* არის θ–ს საძიებელი შეფასება. ამისათვის ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ ნაშრომის

ძირითადი თეორემა

ვთქვათ X მოკვეთილი ექსპონენციალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა, რომლის განაწილების სიმკვრივე მოიცემა (1) ფორმულით. მაშინ მაქსიმალური დასაჯერობის განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი θ^* ,როცა $0<\bar{X}<\frac{\alpha+\beta}{2}$; სადაც θ^* $(0;\infty)$–ის სტაციონალური წერტილია.

დამტკიცება:

თუ გავითვალისწინებთ. შედეგი 2.1-ს თეორემა დამტკიცებული იქნება თუ ვაჩვენებთ, რომ θ^* მაქსიმუმის წერტილია. როგორც ვიცით, ამისათვის საჭიროა დავამტკიცოთ შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}L(x,\theta,\alpha,\beta)<0 \qquad \text{როცა } \theta=\theta^*.$$

მართლააც გვაქვს:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}L(x,\theta,\alpha,\beta)=-\frac{n}{\theta^2}-\frac{n(\alpha^2e^{-\theta\alpha}-\beta^2e^{-\theta\beta})(e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta})}{(e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta})^2}-\frac{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta})^2}=$$

$$=\frac{n(e^{-\theta(\alpha+\beta)}(\beta-\alpha)^2)}{(e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta})^2}-\frac{n}{\theta^2}<n(\frac{e^{-\theta(\alpha+\beta)}(\beta-\alpha)^2}{(e^{-\theta\alpha})^2\theta^2(\beta-\alpha)^2}-\frac{1}{\theta^2})=n(\frac{e^{-\theta\beta}e^{-\theta\alpha}}{(e^{-\theta\alpha})^2\theta^2}-\frac{1}{\theta^2})=n(\frac{e^{-\theta\beta}}{e^{-\theta\alpha}\theta^2}-\frac{1}{\theta^2})<0$$

თეორემის დამტკიცებისას გამოვიყენოთ შემდეგი უტოლობები: $e^x>1+x$, როცა $x\neq 0$ და $\frac{e^{-\theta\beta}}{e^{-\theta\alpha}}<1$, როცა $\alpha<\beta$.

ლიტერატურა

[1]. ე.ნადარაია, რ.აბსავა, მ.ფაცაცია, „ალბათობის თეორია“, თსუ-ს გამომცემლობა. 2008წ.
[2]. Bahadur R.R. Lectures on Estimation Theory. 1985.
[3]. Dias J.B. Statistical Infence. 2007
[4]. Strombeg D.Maximum Likelihood Estimation. 2004.
[5]. Wesserman L. All of Statistics. 2005.