მოკვეთილი ექსპონენციალური განაწილების პარამეტრების შეფასება

თინა მგელაძე

ხელმძღვანელი: გრიგოლ სოხაძე

მოკვეთილი ექსპონენციალური განაწილების პარამეტრის შეფასება

$$f(x,\theta,\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & x\notin(\alpha,\beta]\\ \dfrac{\theta e^{-\theta x}}{e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta}} & x\in(\alpha,\beta]\end{cases}$$

ლემა: $$L(x,\theta,\alpha,\beta)=\theta^{n}(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-n}e^{-n\theta\bar{X}}$$

დამტკიცება:

$$L(x,\theta,\alpha,\beta)=f(x_1,\theta,\alpha,\beta)\ldots f(x_n,\theta,\alpha,\beta)$$

$$=\theta e^{-\theta x_1}(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-1}\ldots\theta e^{-\theta x_n}(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-1}$$

$$=\theta^{n}e^{-\theta x_1}(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-n}e^{-n\theta\bar{X}}$$

დასაჯერობის განტოლება

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x,\theta,\alpha,\beta)=0$$

$$\ln L(x,\theta,\alpha,\beta)=\ln(\theta^{n}(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})^{-n}e^{-n\theta\bar{X}})$$

$$=n\ln\theta-n\ln(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})-n\theta\bar{X}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x,\theta,\alpha,\beta)=\frac{n}{\theta}-\frac{n(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}-n\bar{X}$$

თეორემა:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}-\frac{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}-\bar{X}=\frac{\alpha+\beta}{2}-\bar{X}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}-\frac{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

დამტკიცება:

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1}{\theta}-\frac{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}\right]=\lim_{\theta\to 0}\frac{\dfrac{e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta}}{\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha}}-\theta}{\dfrac{(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})\theta}{\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha}}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta}-\theta(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{\theta(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})}=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\alpha e^{-\theta\alpha}+\beta e^{-\theta\beta}-\theta(\alpha^2 e^{-\theta\alpha}-\beta^2 e^{-\theta\beta})-(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{\theta(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})+e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(-\theta(-\beta^2 e^{-\theta\beta}+\alpha^2 e^{-\theta\alpha}))'}{(\theta(e^{-\theta\beta}-e^{-\theta\alpha})+(e^{-\alpha\theta}-e^{-\beta\theta})'}=$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\theta(\beta^3 e^{-\theta\beta}-\alpha^3 e^{-\theta\alpha})-(-\beta^2 e^{-\theta\beta}+\alpha^2 e^{-\theta\alpha})}{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})+\theta(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})-\alpha e^{-\theta\alpha}+\beta e^{-\theta\beta}}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\theta\to 0\Rightarrow e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta}\to 0$$

თეორემა:

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}L(x,\theta,\alpha,\beta)=-\bar{X}$$

$L(x,\theta,\alpha,\beta)\in C^{(1)}(0,\infty)$ მაქსიმალური მნიშვნელობა

თუ ის არსებობს მიიღწევა სტაციონალურ θ^{*} წერტილში

და არ მიიღწევა $(0;\infty)-$ს სასაზღვრო წერტილში.

ძირითადი თეორემა:

მაქსიმალური დასაჯერობის განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი θ^* ,როცა $0 < \bar{X} < \dfrac{\alpha+\beta}{2}$;

სადაც θ^* $(0;\infty)-$ის სტაციონალური წერტილია.

დამტკიცება:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}L(x,\theta,\alpha,\beta)<0 \qquad \text{როცა} \quad \theta=\theta^*.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}L(x,\theta,\alpha,\beta)=$$

$$-\frac{n}{\theta^2}-\frac{n(\alpha^2e^{-\theta\alpha}-\beta^2e^{-\theta\beta})(e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta})}{(e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta})^2}-\frac{(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})(\beta e^{-\theta\beta}-\alpha e^{-\theta\alpha})}{(e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta})^2}=$$

$$\frac{n(e^{-\theta(\alpha+\beta)}(\beta-\alpha)^2)}{(e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta})^2}-\frac{n}{\theta^2}<n(\frac{e^{-\theta(\alpha+\beta)}(\beta-\alpha)^2}{(e^{-\theta\alpha})^2\theta^2(\beta-\alpha)^2}-\frac{1}{\theta^2})=$$

$$n(\frac{e^{-\theta\beta}e^{-\theta\alpha}}{(e^{-\theta\alpha})^2\theta^2}-\frac{1}{\theta^2})=n(\frac{e^{-\theta\beta}}{e^{-\theta\alpha}\theta^2}-\frac{1}{\theta^2})<0$$

$$=\frac{n(e^{-\theta(\alpha+\beta)}(\beta-\alpha)^2)}{(e^{-\theta\alpha}-e^{-\theta\beta})^2}-\frac{n}{\theta^2}<n(\frac{e^{-\theta(\alpha+\beta)}(\beta-\alpha)^2}{(e^{-\theta\alpha})^2\theta^2(\beta-\alpha)^2}-\frac{1}{\theta^2})=n(\frac{e^{-\theta\beta}e^{-\theta\alpha}}{(e^{-\theta\alpha})^2\theta^2}-\frac{1}{\theta^2})=n(\frac{e^{-\theta\beta}}{e^{-\theta\alpha}\theta^2}-\frac{1}{\theta^2})$$

$$e^x>1+x, \text{ როცა } x\neq 0 \text{ და } \frac{e^{-\theta\beta}}{e^{-\theta\alpha}}<1, \text{ როცა } \alpha<\beta.$$

გმადლობთ ყურადღებისთვის!