ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის მიმართულების სტუდენტ

ზურაბ ვაშაკიძის

საბაკალავრო ნაშრომი თემაზე:

”ბზარებით შესუსტებული შედგენილი სხეულებისათვის დრეკადობის თეორიის ანტიბრტყელი ამოცანების მიახლოებითი ამონახსნის სასრულ-სხვაობიანი მეთოდის შესახებ”

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, თსუ-ს მათემატიკის და კომპიუტერული მეცნიერებების დეპარტამენტის, რიცხვითი ანალიზისა და გამოთვლითი ტექნოლოგიების მიმართულების ასისტენტ პროფესორი:

არჩილ პაპუკაშვილი

თბილისი, 2014 წელი

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Faculty Of Exact And Natural Sciences

Student Of Mathematics

Zurab Vashakidze

Bachelor's Thesis:

"METHOD OF APPROXIMATE SOLUTION OF ANTIPLANE PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY FOR COMPOSITE BODIES WEAKNED BY CRACKS"

SUPERVISOR: Candidate Of Physical-Mathematical Sciences, Assistant Professor Of TSU, Department Of Mathematics And Computer Sciences, Division Of Numerical Analysis And Computational Technology:

Archil Papukashvili

Tbilisi, 2014 Year

ს ა რ ჩ ე ვ ი

რეზიუმე. საბაკალავრო ნაშრომში შესწავლილია ბზარებით შესუსტებული უბნობრივ ერთგვაროვანი მართკუთხა განიკვეთის მქონე სხეულისთვის დრეკადობის თეორიის ანტიბრტყელი ამოცანების ამოხსნის სასრულ-სხვაობიანი მეთოდი. დიფერენციალური განტოლება შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით აპროქსიმირდება სხვაობიანი ანალოგით. ამოცანის ასეთი დასმა საშუალებას იძლევა უშუალოდ ვიპოვნოთ გადაადგილების ფუნქციის რიცხვითი მნიშვნელობები ბადის კვანძებში. შემოთავაზებული სათვლელი ალგორითმები აპრობირებულია კონკრეტული პრაქტიკული ამოცანისთვის და თვლის შედეგი კარგ მიახლოებაშია თეორიული კვლევით მიღებულ შედეგთან.

შესავალი. სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას ბზარებით შესუსტებული შედგენილი სხეულებისათვის დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. გამოსაკვლევი ამოცანების მათემატიკური მოდელის საწყის მიახლოებად შეიძლება გამოყენებული იქნას დრეკადობის ანტიბრტყელი თეორიის განტოლებები ბზარებით შესუსტებული შედგენილი (უბნობრივ-ერთგვაროვანი) სხეულებისთვის. ბზარის ამოცანას სასრულ-სხვაობიანი მეთოდით ორთოტროპულ (კერძო შემთხვევაში იზოტროპულ) სხეულისათვის კვადრატული არის შემთხვევაში, საწყის ეტაპზე ვიხილავთ ერთგვაროვანი, შემდეგ კი უბნობრივ-ერთგვაროვანი სხეულისათვის. ზემოაღნიშნული ამოცანების თეორიული კვლევის გარდა ჩვენი მიზანია ავაგოთ სწრაფად კრებადი რიცხვითი მეთოდი.

ა. პაპუკაშვილის შრომებში ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდის გამოყენებით შესწავლილია დრეკადობის თეორიის შემდეგი ანტიბრტყელი ამოცანა უსასრულო არის შემთხვევაში.

ვთქვათ დრეკად Ω სხეულს იკავია $z = x + iy$ კომპლექსური ცვლადის სიბრტყე, რომელიც გაჭრილია $L = [-1; +1]$ ხაზის გასწვრივ და შედგება ორი ორთოტროპული (კერძო შემთხვევაში იზოტროპული) ერთგვაროვანი ნახევარსიბრტყისაგან.

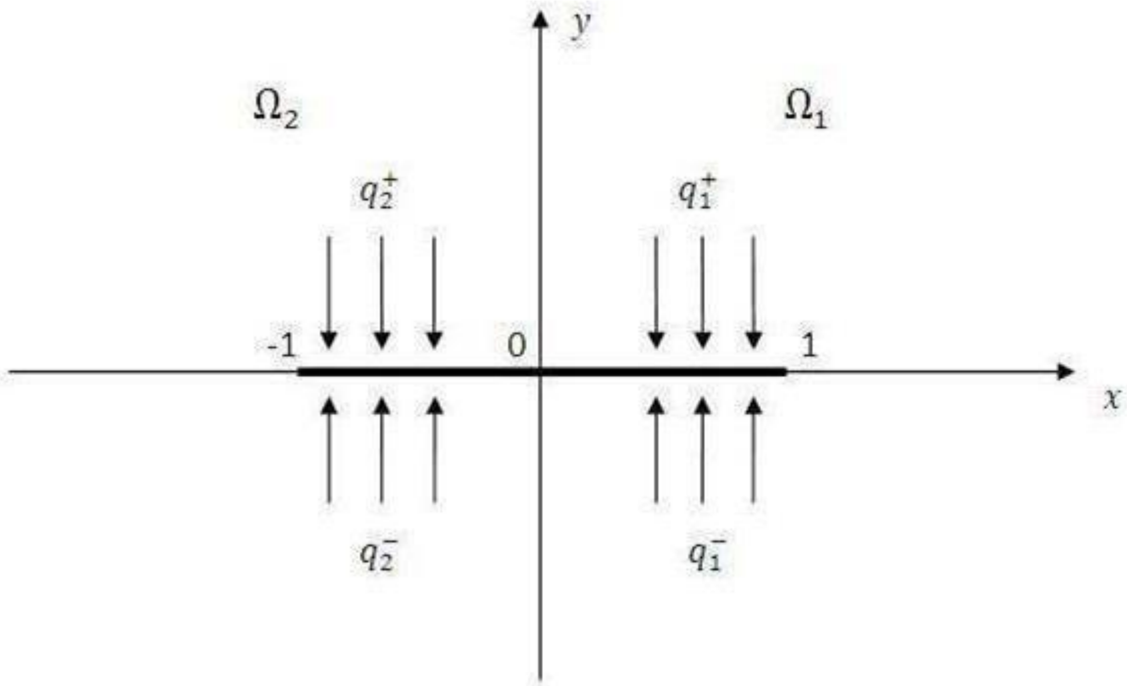
$$\Omega_1 = \{z: Re(z) \geq 0, x \notin L_1 = [0; 1]\}$$

და

$$\Omega_2 = \{z: Re(z) \leq 0, x \notin L_2 = [-1; 0]\}$$

რომელიც შედუღებულია $x = 0$ ღერძის გასწვრივ. ვგულისხმობთ, რომ დრეკადობის მთავარი ძაბვები ემთხვევიან საკოორდინატო ღერძებს. სიდიდეები და ფუნქციები, დაკავშირებული Ω_k-სთან, ავღნიშნოთ ინდექსით k, $k = 1,2$.

მათემატიკურად ამოცანა შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი სახით: ვიპოვოთ გადაადგილების $w_k(x, y)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს გამრუდებულ ჰარმონიულ დიფერენციალურ განტოლებას:



ნახ. 1

$$\frac{\partial^2 w_k(x,y)}{\partial x^2} + \lambda_k^2 \frac{\partial^2 w_k(x,y)}{\partial y^2} = 0, \;\; (x, y)\epsilon\Omega_k \qquad (1.1)$$

და სასაზღვრო პირობებს:

ა) ბზარის საზღვარზე მოცემულია მხები ძაბვები: $\tau_{yz}^{(k)}(x, \pm 0) = q_k^{\pm}(x)$ ანუ

$$b_{44}^{(k)} \frac{\partial w_k(x,\pm 0)}{\partial y} = q_k^{(\pm)}(x), \;\; x\epsilon \mathrm{L}_k \qquad (1.2)$$

ბ) y ღერძზე სრულდება უწყვეტობის პირობები:

$$w_1(0; y) = w_2(0; y), \quad y \in (-\infty; \infty), y \neq 0 \qquad (1.3)$$

$$\tau_{xz}^{(1)}(0; y) = \tau_{xz}^{(2)}(0; y) \;, \;\; \text{ანუ} \; b_{55}^{(1)} \frac{\partial w_1(0;y)}{\partial x} = b_{55}^{(2)} \frac{\partial w_2(0;y)}{\partial x} \qquad (1.4)$$

სადაც $\lambda_k^2 = \frac{b_{44}^{(k)}}{b_{55}^{(k)}}$, $b_{44}^{(k)}, b_{55}^{(k)}$ $-$ დრეკადი მუდმივები უშუალოდ ჰუკის კანონიდან აღებული, $q_k(x)$ ჰოლდერის კლასის ფუნქციაა[1], $k = 1,2$; კერძოდ თუ გვაქვს იზოტროპული შემთხვევა $b_{44}^{(k)} = b_{55}^{(k)} = \mu_k$, μ_k $-$ ძვრის მოდულები, რიცხვითი პარამეტრი $\lambda_k = 1$, $k = 1,2$.

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Hölder_condition

თავი 1

ბზარის ამოცანა ერთგვაროვანი სხეულისათვის.

§1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს

განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0,\ (x,y) \in \Omega \tag{1.1.1}$$

ბზარეზე გვაქვს პირობა

$$\tau_{yz}^{(+)} = b_{44}\frac{\partial w(x,+0)}{\partial y} = q^{(+)}(x), \quad x \in L$$

(1.1.2)

$$\tau_{yz}^{(-)} = b_{44}\frac{\partial w(x,-0)}{\partial y} = q^{(-)}(x), \quad x \in L$$

ხოლო კვადრატის გვერდებზე კი შემდეგი სასაზღვრო პირობა

$$w(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_1 = \{(x,y) | x = n, y \in [-n,n]\},$$

$$w(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_2 = \{(x,y) | x = -n, y \in [-n,n]\}, \tag{1.1.3}$$

$$w(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_3 = \{(x,y) | x \in [-n,n], y = n\},$$

$$w(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Gamma_4 = \{(x,y) | x \in [-n,n], y = -n\},$$

სადაც $\lambda^2 = \frac{b_{44}}{b_{55}}$, b_{44}, b_{55} დრეკადი მუდმივებია ორთოტროპული სხეულის უშუალოდ ჰუკის კანონიდან აღებული, იზოტროპულ შემთხვევასი

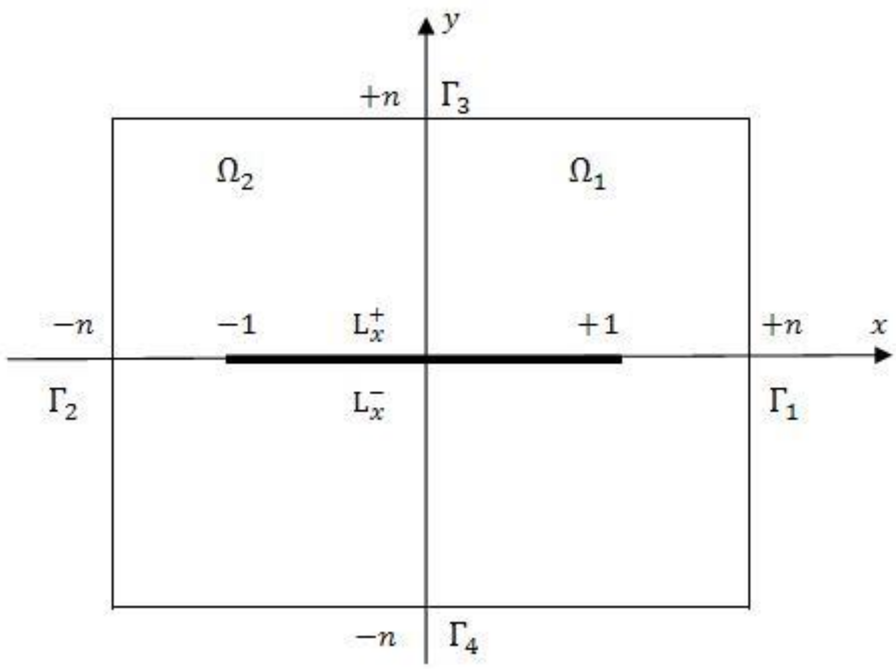
$\lambda^2 = 1$, $b_{44} = \mu$, $\mu -$ ძვრის მოდულია, $q^{(\pm)}(x)$ ჰელდერის კლასის ფუნქციაა, სიმეტრიული დატვირთვის დროს $q^{(+)}(x) = q^{(-)}(x) = q(x)$

$$L_1 = [0,1], \qquad L_2 = [-1,0], \ L = L_1 \cup L_2$$

$$\overline{\Omega} = \Omega_1 \cup \Omega_2 = \{(x,y), \quad x \in (-n,n), \quad y \in (-n,n)\}; \ \Omega = \overline{\Omega} \setminus (L_1 \cup L_2)$$

ბზარის ბოლოებში უნდა სრულდებოდეს **შეთანხმების პირობა**

$$w(1,+0) = w(1,-0), \quad w(-1,+0) = w(-1,-0) \tag{1.1.4}$$



ნახ. 2

<u>შენიშვნა:</u> ბზარის L_x^+ და L_x^- წირებზე გვაქვს გადაადგილების ორი განსხვავებული მნიშვნელობა $w(x,+0)$ და $w(x,-0)$, $x \in (-1,+1)$.

ყოველთვის ვიგულისხმოდ, რომ n −ნატურალური რიცხვია ($n \in \mathbb{N}$) და შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა $n \gg 1$.

§1.2 სხვაობიანი ბადე.

ვთქვათ n ფიქსირებულია. განვიხილოთ სხვაობიანი რეგულარული კვადრატული ბადე ბიჯით $h_1 = h_2 = h = 1/N, N \in \mathbb{N}$.

$$\Omega_h = \Big\{(x_i, y_j), \quad x_i = i\,h, \quad y_j = j\,h, \quad h = \frac{1}{N},$$
$$i = -(nN-1), \dots, 0, \dots, (nN-1), \quad j = -(nN-1), \dots, 0, \dots, (nN-1)\Big\},$$

$$\overline{\Omega_h} = \Big\{(x_i, y_j), \quad x_i = i\,h, \quad y_j = j\,h, \quad h = \frac{1}{N}, \quad i = -nN, \dots, 0, \dots, nN,$$
$$j = -nN, \dots, 0, \dots, nN\Big\}.$$

$$\Gamma_{1h} = \{(x_i, y_j), \ \ i = nN, \quad j \in [-(nN-1), (nN-1)]\},$$

$$\Gamma_{2h} = \{(x_i, y_j), \ \ i = -nN, \quad j \in [-(nN-1), (nN-1)]\},$$

$$\Gamma_{3h} = \{(x_i, y_j), \ \ i \in [-(nN-1), (nN-1)], \ \ j = nN\},$$

$$\Gamma_{4h} = \{(x_i, y_j), \ \ i \in [-(nN-1), (nN-1)], \ \ j = -nN\},$$

$$\mathrm{L}_{1h} = \{(x_i, y_j), \ \ i \in [0, N], \quad j = 0\},$$

$$\mathrm{L}_{2h} = \{(x_i, y_j), \ \ i \in [-N, 0], \quad j = 0\},$$

$$\mathrm{L}_h = \mathrm{L}_{1h} \cup \mathrm{L}_{2h}, \quad \Omega_h^* = \Omega_h \backslash L_h$$

§1.3 სხვაობიანი ანალოგი (სქემა)

(1.1.1) – (1.1.4) ამოცანისათვის გამოვწეროთ სხვაობიანი სქემა:

$$\mathcal{L}_h \ W_{i,j} \equiv \frac{W_{i+1,j} - 2\,W_{i,j} + W_{i-1,j}}{h^2} + \lambda^2 \quad \frac{W_{i,j+1} - 2\,W_{i,j} + W_{i,j-1}}{h^2} = 0 \qquad (1.1.1*)$$

$(x_i, y_j) \in \Omega_h^*$; $W_{i,j}$ – ბადური ფუნქცია, $W_{i,j} \approx w(x_i, y_j)$;

$\mathcal{L}_h$ ოპერატორის განსაზღვრის არე (i,j) ინდექსებში გამოვწეროთ დაწვრილებით:

$j \neq 0.$ მაშინ $i = -(nN-1), \dots, -1,0,1, \dots, (nN-1), \qquad j = 1,2, \dots, (nN-1)$;

$$i = -(nN-1), \dots, -1,0,1, \dots, (nN-1), \ \ j = -1, -2, \dots, -(nN-1);$$

$j = 0,$ მაშინ $i = -(nN-1), -(nN-2), \dots, -(N+2), -(N+1)$;

$$i = (N+1), (N+2), \dots, (nN-2), (nN-1).$$

ბზარის (1.1.2) პირობის სხვაობიანი ანალოგია:

$$b_{44} \frac{W_{i,1} - W(x_i, +0)}{h} = q^{(+)}(x_i), \ \ i = -N, -(N-1), \dots, (-1), 0, 1, \dots, (N-1), N; \ \ (1.1.2*)$$

$$b_{44} \frac{W_{i,(-1)} - W(x_i, -0)}{h} = q^{(-)}(x_i), \qquad i = -N, -(N-1), \dots, (-1), 0, 1, \dots, (N-1), N$$

$W(x_i, \pm 0)$ – თვის შემოვიღოთ აღნიშვნა $W(x_i, \pm 0) = W_{i,(\pm 0)}$

სასაზღვრო პირობები (1.1.3) სხვაობიან ბადეზე გადავა შემდეგი სახით:

$W_{nN,j} = 0$ და $W_{(-nN),j} = 0$,
$$j = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1),$$

(1.1.3*)

$W_{i,nN} = 0$ და $W_{i,(-nN)} = 0$,
$$i = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1).$$

ბზარების ბოლოებში თავსებადობის პირობები გადატანილი სხვაობიან ბადეზე მიიღებს სახეს:

$$W_{-N,(+0)} = W_{-N,(-0)} \equiv W_{-N,0}$$

(1.1.4*)

$$W_{N,(+0)} = W_{N,(-0)} \equiv W_{N,0}.$$

გადავწეროთ სქემა (1.1.1*) – (1.1.4*) შემდეგი სახით:

$$W_{i,j} = \frac{1}{2(1+\lambda^2)} \left[W_{i+1,j} + W_{i-1,j} + W_{i,j+1} + W_{i,j-1}\right]. \qquad (1.3.1)$$

$$j \neq 0, \quad \text{მაშინ} \quad i = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1),$$

$$j = 1,2, \dots, (nN-1);$$

$$\mathrm{i} = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1), j = -1, -2, \dots, -(nN-1);$$

$$j = 0, \quad \text{მაშინ} \quad i = -(nN-1), -(nN-2), \dots, -(N+2), -(N+1);$$

$$i = (N+1), (N+2), \dots, (nN-2), (nN-1).$$

ე.ი. (1.3.1) ფორმულით $W_{i,j} -$ ებს ვითვლით ყველა ზემო აღნიშნულ წერტილში (ბადის კვანძში), ხოლო ბზარზე (**<u>ბზარის წირებზე</u>**) შემდეგი ფორმულით:

$$W_{i,(+0)} = W_{i,(1)} + \frac{h}{b_{44}} q_i^{(+)} \text{ და } W_{i,(-0)} = W_{i,(-1)} + \frac{h}{b_{44}} q_i^{(-)}, \qquad (1.3.2)$$

$$i = -N, -(N-1), \dots, (-1), 0, 1, \dots, (N-1), N;$$

ბზარის ბოლოებში კი გვაქვს თავსებადობის პირობები:

$$W_{(-N),(+0)} = W_{(-N),(-0),} \; W_{N,(+0)} = W_{N,(-0)} \qquad (1.3.3)$$

კვადრატის გვერდებზე გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობა:

$$W_{nN,j} = 0 \text{ და } W_{(-nN),j} = 0,$$

$$j = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1), \qquad (1.3.4)$$

$$W_{i,nN} = 0 \text{ და } W_{i,(-nN)} = 0,$$

$$i = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1).$$

პირველ რიგში მოვსინჯოთ მარტივი იტერაციული პროცესი (მეთოდი):

$$W_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{2(1+\lambda^2)} \left[W_{i+1,j}^{(k)} + W_{i-1,j}^{(k)} + W_{i,j+1}^{(k)} + W_{i,j-1}^{(k)}\right], \qquad (1.3.5)$$

$$j \neq 0, \quad \text{მაშინ} \quad i = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1),$$

$$j = 1,2, \dots, (nN-1);$$

$$\mathrm{i} = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1), j = -1, -2, \dots, -(nN-1);$$

$$j = 0, \text{ მაშინ } i = -(nN-1), -(nN-2), \dots, -(N+2), -(N+1);$$

$$i = (N+1), (N+2), \dots, (nN-2), (nN-1).$$

$$W_{i,(+0)}^{(k+1)} = W_{i,(+1)}^{(k)} - \frac{h}{b_{44}} q_i^{(+)} \text{ და } W_{i,(-0)}^{(k+1)} = W_{i,(-1)}^{(k)} - \frac{h}{b_{44}} q_i^{(-)}, \tag{1.3.6}$$

$$i = -N, -(N-1), \dots, (-1), 0, 1, \dots, (N-1), N;$$

$$W_{(-N),(+0)}^{(k+1)} = W_{(-N),(-0)}^{(k+1)},\ W_{N,(+0)}^{(k+1)} = W_{N,(-0)}^{(k+1)} \tag{1.3.7}$$

$$W_{nN,j}^{(k)} = 0 \text{ და } W_{(-nN),j}^{(k)} = 0,$$

$$j = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1),$$

(1.3.8)

$$W_{i,nN}^{(k)} = 0 \text{ და } W_{i,(-nN)}^{(k)} = 0$$

$$i = -(nN-1), -(nN-2), \dots, (-1), 0,1, \dots, (nN-2), (nN-1),$$

$$k = 0,1,2, \dots; \qquad W_{i,j}^{(0)} \equiv 0.$$

არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ბზარის ბოლოებში შეთანხმების პირობებიდან გვაქვს:

$$q_N^{(+)} = q_N^{(-)}\ ,\ \ q_{(-N)}^{(+)} = q_{(-N)}^{(-)}; \tag{1.3.9}$$

$n -$ შეგვიძლია ვცვალოთ, ასევე $h -$ იც შეგვიძლია ვცვალოთ.

ეს ყველაზე მარტივი იტერაციაა, ამასთანავე ყველაზე უხეშიც; შესაძლებელია, პირდაპირ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ გაუსის მეთოდის გამოყენებით.

თავი 2

ბზარის ამოცანა უბნობრივ-ერთგვაროვანი სხეულისათვის

§2.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს

განვიხილოთ $\mathbb{R}^2 -$ ში შემდეგი სიმრავლეები:

$$\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_1; \quad \Omega_2 = \Omega_2^0 \setminus L_2; \;\; \Omega_1 = \Omega_1^0 \setminus L_1.$$

სადაც: $\Omega_2^0 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}),\; \mathrm{x} \in [-\mathrm{n}, 0], \mathrm{y} \in [-\mathrm{n}, \mathrm{n}]\}$, $\mathrm{L}_2 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}),\; \mathrm{x} \in [-1{,}0]\,, \mathrm{y} = 0\,\}$;

$$\Omega_1^0 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{x} \in [0, \mathrm{n}], \mathrm{y} \in [-\mathrm{n}, \mathrm{n}]\}, \mathrm{L}_1 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{x} \in [0{,}1], \mathrm{y} = 0\,\};$$

განვიხილოთ ასევე სიმრავლეები:

$$\Omega^0 = \Omega \setminus L_y;$$

$$L_y = L_y^+ \cup L_y^-;$$

$$L_y^+ = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{x} = 0, \mathrm{y} \in [0, \mathrm{n}]\}, L_y^- = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}), \mathrm{x} = 0, \mathrm{y} \in [-\mathrm{n}, 0]\}$$

<u>**შენიშვნა:**</u> Ω არის კვადრატული ჭრილი, ხოლო $\Omega^0 -$ კვადრატი ჭრილით და გამყოფი ზედაპირის გარეშე.

განვიხილოთ ჩვენი ძირითადი ამოცანა:

მოცემულია განტოლება

$$\frac{\partial^2 w_k(x,y)}{\partial x^2} + \lambda_k^2 \frac{\partial^2 w_k(x,y)}{\partial y^2} = 0, \;\; (x, y)\epsilon\Omega_k \tag{2.1.1}$$

ა) ბზარის საზღვარზე მოცემულია მხები ძაბვები, ხოლო ბზარის ბოლოებში, კი შეთანხმების პირობები:

$$\tau_{yz}^{(\pm)} = b_{44}^{(k)} \frac{\partial w_k(x, \pm 0)}{\partial y} = q_k^{(\pm)}(x), \;\; x\epsilon \mathrm{L}_k \tag{2.1.2}$$

$$\mathrm{w}_2\,(-1, +0) = \mathrm{w}_2\,(-1, -0)\,, \;\; \mathrm{w}_1\,(1, +0) = \mathrm{w}_1\,(1, -0) \tag{2.1.3}$$

ბ) y ღერძზე (<u>**გამყოფ საძღვარზე**</u>) სრულდება უწყვეტობის პირობები:

$$w_1(0; y) = w_2(0; y), y \in [-n, n]\,, y \neq 0 \tag{2.1.4}$$

$$\tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}, \text{ანუ } b_{55}^{(1)} \frac{\partial w_1(0;y)}{\partial x} = b_{55}^{(2)} \frac{\partial w_2(0;y)}{\partial x} \tag{2.1.5}$$

ხოლო Ω კვადრატის გვერდებზე კი შემდეგი სასაზღვრო პირობა

$$w_2(-n,y)=0 \text{ და } w_1(n,y)=0, \qquad y\epsilon[-n,n],$$

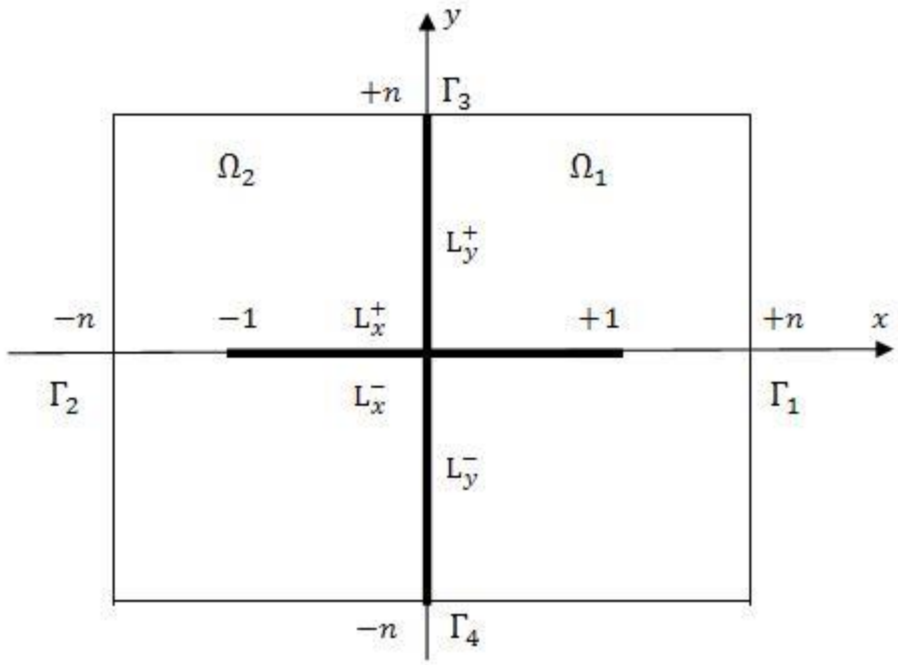
$$(2.1.6)$$

$$w_2(x,\pm n)=0\,, x\epsilon[-n,0] \text{ და } w_1(x,\pm n)=0\,, \qquad x\epsilon[0,n].$$

<u>შენიშვნა[1]:</u> თუ (2.1.1) განტოლება გამყოფ საზღვარზე არ კმაყოფილდება, მაშინ $(x,y)\in\Omega_k\setminus L_y$;

<u>შენიშვნა[2]:</u> რადგანაც განტოლება (2.1.1) გამყოფ საზღვარზე კმაყოფილდება ორი $W_{1,0,j}$ და $W_{2,0,j}$ უცნობი სიდიდის ნაცვლად ვიღებთ ერთ უცნობ სიდიდეს $W12_{0,j}$;

<u>შენიშვნა[3]:</u> ერთი უცნობი სიდიდის $W12_{0,j}$ პოვნა კი შეგვიძლია უწყვეტობის მეორე (2.1.5) პირობის გამოყენებით.



ნახ. 3

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ $\lambda_k^2=\frac{b_{44}^{(k)}}{b_{55}^{(k)}}$, $b_{44}^{(k)}$, $b_{55}^{(k)}-$ დრეკადი მუდმივებია უშუალოდ ჰუკის კანონიდან აღებული, $q_k^{(\pm)}(x)$ ჰოლდერის კლასის ფუნქციაა, კერძოდ იზოტროპულ შემთხვევაში $b_{44}^{(k)}=b_{55}^{(k)}=\mu_k$, სადაც μ_k- ძვრის მოდულია, რიცხვითი პარამეტრი $\lambda_k=1,\ \ k=1{,}2$.

<u>შენიშვნა:</u> ვიხილავთ სიმეტრიულ დატვირთვებს $q_k^{(+)}(x)\ =\ q_k^{(-)}(x)=q_k(x)$, მაშინ გვექნება აცილებადი განსაკუთრებულობა, სიმეტრიული დატვირთვის დროს ბზარი სწორხაზოვანი დარჩება. სიმეტრიული თუ არ იქნება დატვირთვა, მაშინ ინტეგრალურ განტოლებაში რეგურალური ნაწილიც იქნება მახასიათებელ სინგულარულ ნაწილთან ერთად. თუ ბზარზე გვექნება სიმეტრიული მუდმივი

დატვირთვა და ასევე ორივე მხარეს ერთი და იგივე მასალა, მაშინ შეიძლება განვიხილოთ ამოცანა მეოთხედ კვადრატში.

§2.2 სხვაობიანი ბადე

როგორც ერთგვაროვან შემთხვევაში, ავიღოთ სხვაობიანი ბადე ბიჯით h_1 (x −ის გასწვრივ), h_2 (y −ის გასწვრივ). წინასწარ დავუშვათ, რომ $\boldsymbol{n}$ და $\boldsymbol{N}-$ მთელი რიცხვებია. (**<u>შენიშვნა:</u>** ამოცანა 2-ში ვიყენებთ ამოცანა 1-ში გამოყენებულ აღნიშვნებს). საქმე რომ გავიმარტივოთ ავიღოთ h_1 და h_2 ტოლი, ე.ი. გვექნება რეგულარული ბადე. სიმარტივისთვის განვიხილოთ ბადე ბიჯით $h = 1/N$.

ეს ნიშნავს, რომ $x_i = i\,h\,,\ \ i\ \in\ [-nN, nN]\,,\ y_j = j\,h\,,\ \ j\ \in\ [-nN, nN]$.

L_1, L_2, L_y^+, L_y^- მონაკვეთებზე შესაბამისად განლაგებულია შემდეგი კვანძები:

$$x_i \in [n, 0], x_i \in\ [-n, 0],\ y_j \in [0, nN], y_j \in [0, -nN], y_0 = 0.$$

§2.3 სხვაობიანი ანალოგი (სქემა)

სხვაობიანი სქემა (2.1.1) განტოლებისათვის გამოიწერება Ω_h ბადის კვანძებში

$$\Omega_h = \Omega_{2h} \cup \Omega_{1h};\ \Omega_{2h} = \Omega_{2h}^0 \setminus L_{2h};\ \Omega_{1h} = \Omega_{1h}^0 \setminus L_{1h}.$$

სადაც

$$\Omega_{2\mathrm{h}}^0 = \{(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_j}), \mathrm{x_i} \in [-\mathrm{n}, 0], \mathrm{y_j} \in [-\mathrm{n}, \mathrm{n}]\};$$

$$\mathrm{L_{2h}} = \{(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_j})\,,\ \ \mathrm{x_i} \in [-1{,}0], \mathrm{y_j} = 0\};$$

$$\Omega_{1h}^0 = \{(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_j}), \mathrm{x_i} \in [0, \mathrm{n}], \mathrm{y_j} \in [-\mathrm{n}, \mathrm{n}]\};$$

$$\mathrm{L_{1h}} = \{(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_j}), \mathrm{x_i} \in [0{,}1], \mathrm{y_j} = 0\};$$

$$\Omega_h^0 = \Omega_h \setminus L_{yh};$$

$$L_h = L_h^+ \cup L_h^-;$$

$$L_{yh}^+ = \{(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_j}),\ \mathrm{x_i} = 0,\ \mathrm{y_j} \in [0, \mathrm{n}]\},\ L_{yh}^- = \{(\mathrm{x_i}, \mathrm{y_j}),\ \mathrm{x_i} = 0\,,\ \mathrm{y_j} \in [-\mathrm{n}, 0]\}.$$

სხვაობიან განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{W_{k,i+1,j} - 2\,W_{k,i,j} + W_{k,i-1,j}}{h^2} + \lambda_k^2\ \frac{W_{k,i,j+1} - 2\,W_{k,i,j} + W_{k,i,j-1}}{h^2} = 0, (x_i, y_j) \in \Omega_{\mathrm{kh}} \qquad (2.3.1)$$

პირობა (2.1.2) სხვაობიან ბადეზე გამოიწერება შემდეგნაირად:

$$b_{44}^{(1)}\ \frac{W_1(x_i,y_1)-\ W_1(x_i,+0)}{h}=q_{(1)}^{(+)}(x_i)\,,\qquad x_i\epsilon L_{1h}^{+};$$

$$b_{44}^{(1)}\ \frac{W_1(x_i,y_{-1})-\ W_1(x_i,-0)}{h}=q_{(1)}^{(-)}(x_i)\,,\qquad x_i\epsilon L_{1h}^{-};$$

(2.3.2)

$$b_{44}^{(2)}\ \frac{W_2(x_i,y_1)-\ W_2(x_i,+0)}{h}=q_{(2)}^{(+)}(x_i)\,,\qquad x_i\epsilon L_{2h}^{+};$$

$$b_{44}^{(2)}\ \frac{W_2(x_i,y_{-1})-\ W_2(x_i,-0)}{h}=q_{(2)}^{(-)}(x_i)\,,\qquad x_i\epsilon L_{2h}^{-};$$

ოთხი განტოლების თავსებადობისათვის (x_0,y_0) წერტილში აუცილებელია

$$\frac{q_{(1)}^{(+)}(0)}{b_{44}^{(1)}}\ \equiv\ \frac{q_{(2)}^{(+)}(0)}{b_{44}^{(2)}}\text{ და }\frac{q_{(1)}^{(-)}(0)}{b_{44}^{(1)}}\ \equiv\ \frac{q_{(2)}^{(-)}(0)}{b_{44}^{(2)}} \qquad (2.3.3)$$

<u>შენიშვნა:</u> როდესაც ვიხილავთ სიმეტრიული დატვირთვის შემთხვევას, ამიტომ თუ ორივე მხარეს ერთი და იგივე მასალა გვაქვს თავსებადობის პირობა (2.1.4) ბუნებრივად გამოდის.

ასეთ შემთხვევაში (x_0,y_0) წერტილში გამოიწერება სხვაობიანი პირობა

$$b_{44}^{(1)}\ \frac{W_1(0,h)-\ W_1(0,+0)}{h}=q_{(1)}^{(+)}(0);$$

(2.3.4)

$$b_{44}^{(1)}\ \frac{W_1(0,-0)-\ W_1(0,-h)}{h}=q_{(1)}^{(-)}(0);$$

ბზარის წირების ფორმულებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$L_{1h}^{+}\ =\ \{(\mathrm{x_i},\mathrm{y_0}),\mathrm{x_i}=\mathrm{ih},\mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{N};\mathrm{y_0}\ =+0\ \};$$

$$L_{1h}^{-}=\ \{(\mathrm{x_i},\mathrm{y_0}),\ \ \mathrm{x_i}=\mathrm{ih},\ \ \mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{N};\mathrm{y_0}\ =-0\ \};$$

(2.3.5)

$$L_{2h}^{+}\ =\ \{(\mathrm{x_i},\mathrm{y_0}),\mathrm{x_i}=\mathrm{ih},\mathrm{i}=-\mathrm{N},-\mathrm{N}+1,\dots,-1;\mathrm{y_0}\ =+0\ \};$$

$$L_{2h}^{-}=\ \{(\mathrm{x_i},\mathrm{y_0}),\mathrm{x_i}=\mathrm{ih},\mathrm{i}=-\mathrm{N},-\mathrm{N}+1,\dots,-1;\ \mathrm{y_0}\ =-0\ \ \};$$

(2.3.1) სხვაობიანი განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$W_{k,i,j}=\ \frac{1}{2(1+\lambda_k^2)}\left[W_{k,i+1,j}+W_{k,i-1,j}+W_{k,i,j+1}+W_{k,i,j-1}\right]; \qquad (2.3.6)$$

სხვაობიანი სქემა ბზარის საზღვრის მიმდებარე კვანძებში:

როცა $k = 2$, მაშინ:

$$i = (-N)\,, j = 1 : \; W_{k,-N,1} = \frac{1}{2(1+\lambda_k^2)} \left[W_{k,-N+1,1} + W_{k,-N-1,1} + W_{k,-N,2} + W_{k,-N,+0}\right];$$

$$i = (-N)\,, j = -1 : \; W_{k,-N,-1} = \frac{1}{2(1+\lambda_k^2)} \left[W_{k,-N+1,-1} + W_{k,-N-1,-1} + W_{k,-N,-0} + W_{k,-N,-2}\right];$$

(2.3.7)

$$i = (-(N+1))\,, j = 0 : \; W_{k,-N-1,0} = \frac{1}{2(1+\lambda_k^2)} \left[W_{k,-N,0} + W_{k,-N-2,0} + W_{k,-N-1,1} + W_{k,-N-1,-1}\right];$$

როცა $k = 1$, მაშინ

$$i = (+N)\,, j = 1 : \; W_{k,N,1} = \frac{1}{2(1+\lambda_k^2)} \left[W_{k,N+1,1} + W_{k,N-1,1} + W_{k,N,2} + W_{k,N,+0}\right];$$

$$i = (+N)\,, j = -1 : \; W_{k,N,-1} = \frac{1}{2(1+\lambda_k^2)} \left[W_{k,N+1,-1} + W_{k,N-1,-1} + W_{k,N,-0} + W_{k,N,-2}\right]; \quad (2.3.8)$$

$$i = (+N+1)\,, j = 0 : \; W_{k,N+1,0} = \frac{1}{2(1+\lambda_k^2)} \left[W_{k,N+2,0} + W_{k,N,0} + W_{k,N+1,1} + W_{k,N+1,-1}\right];$$

როცა $k = 1$, $k = 2$, მაშინ

$$i \in [-(N-1), (N-1)]\,, j = 1 : \; W_{k,i,1} = \frac{1}{2(1+\lambda_k^2)} \left[W_{k,i+1,1} + W_{k,i-1,1} + W_{k,i,2} + W_{k,i,+0}\right];$$

(2.3.9)

$$i \epsilon [-(N-1), (N-1)]\,, j = -1 : \; W_{k,i,-1} = \frac{1}{2(1+\lambda_k^2)} \left[W_{k,i+1,-1} + W_{k,i-1,-1} + W_{k,i,-0} + W_{k,i,-2}\right];$$

სადაც

$$\mathrm{W}_{\mathrm{k,i,0}}^{+} = \mathrm{w_k}\left(ih, (+0)\right);$$

$$\mathrm{W}_{\mathrm{k,i,0}}^{-} = \mathrm{w_k}\left(ih, (-0)\right);$$

(2.3.10)

$$\mathrm{W_{k,i,+1}} = \mathrm{W_{k,i,+0}} + \mathrm{h}\frac{\mathrm{q}^{(+)}(\mathrm{x_i})}{b_{44}^{(k)}};$$

$$\mathrm{W_{k,i,-1}} = \mathrm{W_{k,i,-0}} + \mathrm{h}\frac{\mathrm{q}^{(-)}(\mathrm{x_i})}{b_{44}^{(k)}};$$

შენიშვნა: ბზარის ყოველ წერტილში სიმეტრიული დატვირთვის დროს

$$\left|\mathrm{W}_{\mathrm{k,i,0}}^{+}\right| = \left|\mathrm{W}_{\mathrm{k,i,0}}^{-}\right|$$

სხვაობიანი სქემა გამყოფი საზღვრის მიმდებარე კვანძებში მარტივად გამოიწერება.

(2.1.4) და (2.1.5) პირობების შესაბამისად სხვაობიანი სქემა **გამყოფი საზღვრის** კვანძებში შაიწერება შემდეგი სახით:

$$W_{1,0,j} = W_{2,0,j} \equiv W12_{0,j}; \tag{2.1.4*}$$

$$j = -nN, (nN-1), -(nN-2), \dots, (-1);$$

$$j = 1, \dots, (nN-2), (nN-1), nN;$$

$$b_{55}^{(2)} \frac{W_{2,0,j} - W_{2,-1,j}}{h} = b_{55}^{(1)} \frac{W_{1,1,j} - W_{1,0,j}}{h}; \tag{2.1.5*}$$

როცა $b_{55}^{(1)} = b_{55}^{(2)}$, მაშინ $W12_{0,j} = \frac{1}{2}\left(W_{1,1,j} + W_{2,-1,j}\right)$.

როცა $b_{55}^{(1)} \neq b_{55}^{(2)}$, მაშინ $W12_{0,j} = \frac{b_{55}^{(2)} W_{2,-1,j} + b_{55}^{(1)} W_{1,1,j}}{b_{55}^{(2)} + b_{55}^{(1)}}$.

საზღვრის მოსაზღვრე კვანძებში:

$i = \pm(nN-1),\ j \epsilon [-(nN-1), (nN-1)]$ და $j = \pm(nN-1),\ i \epsilon [-(nN-1), (nN-1)]$ გამოწერილ (2.3.6) ფორმულაში ბუნებრივია უნდა გავითვალისწინოთ სასაზღვრო პირობები. კერძოდ საზღვრის კვანძებში:

$$\mathrm{W}_{\mathrm{k,nN,j}} = 0, \mathrm{j} \in [-(\mathrm{nN}-1), (\mathrm{nN}-1)];$$

$$\mathrm{W}_{\mathrm{k,-nN,j}} = 0, \mathrm{j} \in [-(\mathrm{nN}-1), (\mathrm{nN}-1)];$$

$$\mathrm{W}_{\mathrm{k,i,-nN}} = 0, \mathrm{i} \in [-(\mathrm{nN}-1), (\mathrm{nN}-1)];$$

$$\mathrm{W}_{\mathrm{k,i,nN}} = 0, \mathrm{i} \in [-(\mathrm{nN}-1), (\mathrm{nN}-1)];$$

<u>შენიშვნა:</u> პირველ რიგში, როგორც ერთგვაროვან შემთხვევაში, უბნობრივ-ერთგვაროვანი ამოცანაც ამოვხსნათ მარტივი იტერაციის მეთოდით.

თავი 3

პროგრამული კოდები და რიცხვითი გათვლები

<u>შენიშვნა:</u> პროგრამები დაწერილია MATLAB R2013b (MATLAB 8.2) ვერსაში.

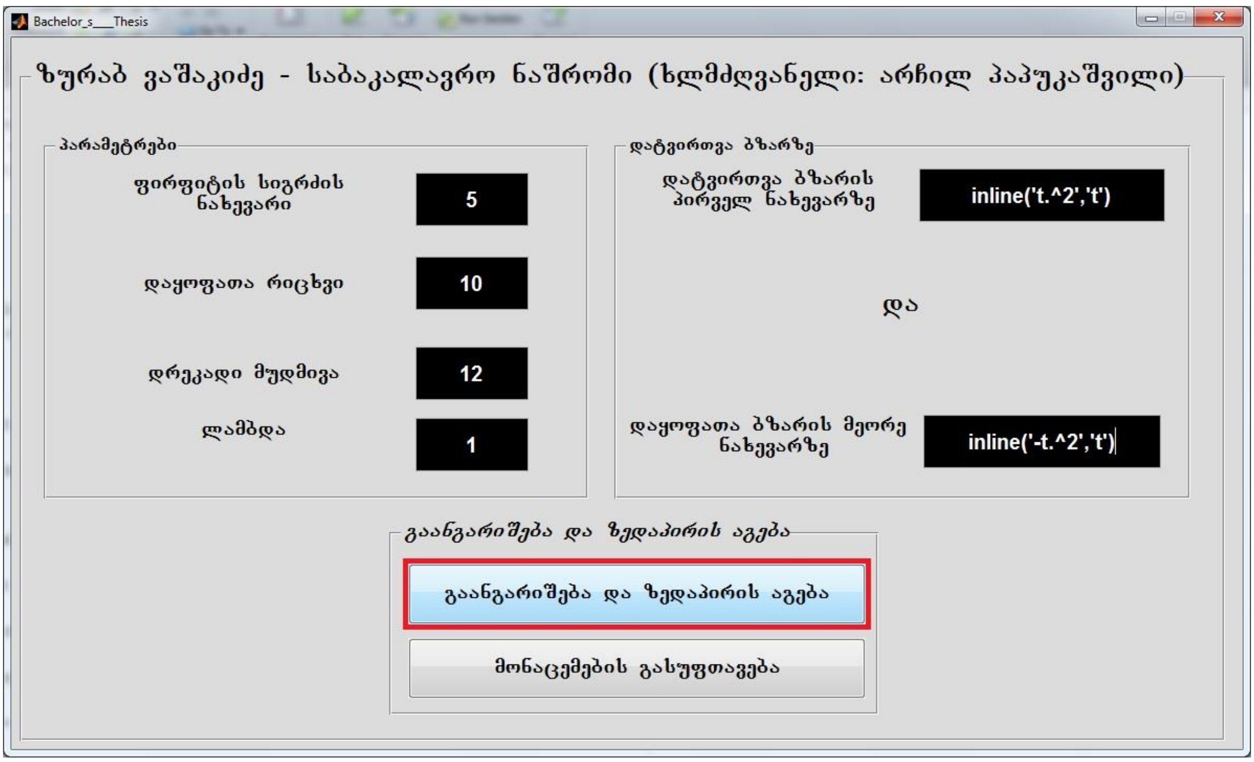
§3.1 პროგრამა.

```
function varargout = Bachelor_s____Thesis(varargin)
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @Bachelor_s____Thesis_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @Bachelor_s____Thesis_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                   'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

function Bachelor_s____Thesis_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles,
varargin)

handles.output = hObject;

guidata(hObject, handles);

function varargout = Bachelor_s____Thesis_OutputFcn(hObject, eventdata,
handles)

varargout{1} = handles.output;



function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

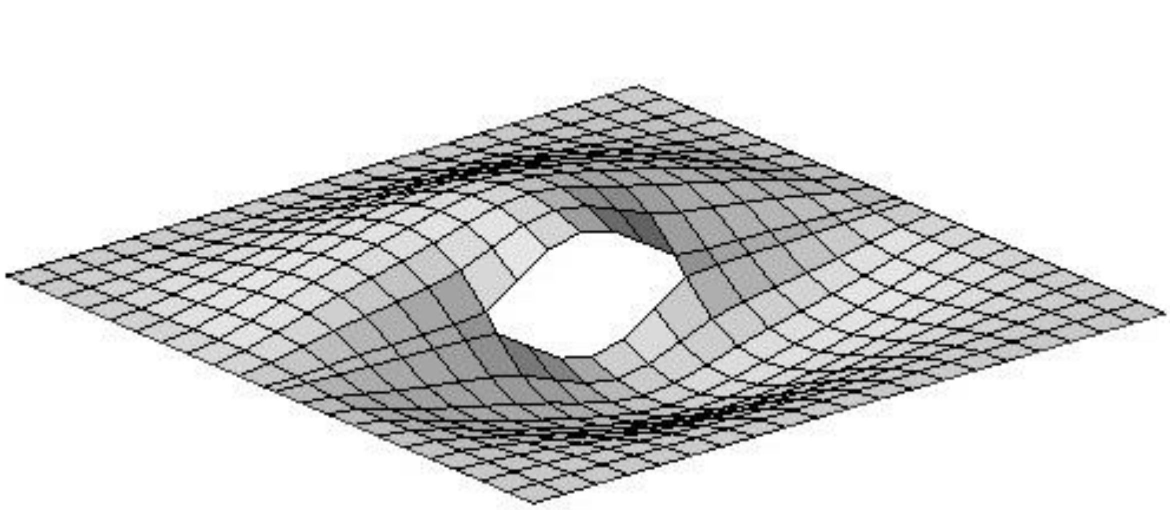
```
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit6_Callback(hObject, eventdata, handles)

function edit6_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)

syms t
n = str2num(get(handles.edit1,'String'));
N = str2num(get(handles.edit2,'String'));
b44 = str2num(get(handles.edit3,'String'));
lambda = str2num(get(handles.edit4,'String'));
h = 1/N;
x = rand(2*n*N + 1,1);
x(1) = -n;
for i = 2:(2*n*N + 1);
    x(i) = x(1) + h*(i - 1);
end
clear i j
```

```
y = x;
A = zeros(2*n*N + 2,2*n*N + 1);
q_plus  = str2num(get(handles.edit5,'String'));
q_minus = str2num(get(handles.edit6,'String'));
W1 = double(q_plus(x(N*(n - 1) + 1:1:N*(n + 1) + 1)));
W2 = double(q_minus(x(N*(n - 1) + 1:1:N*(n + 1) + 1)));
A(n*N + 1,N*(n - 1) + 1:1:N*(n + 1) + 1) = W1;
A(n*N + 2,N*(n - 1) + 1:1:N*(n + 1) + 1) = W2;
L1 = double(q_plus(x(N*(n - 1) + 1:1:N*(n + 1) + 1)));
L2 = double(q_minus(x(N*(n - 1) + 1:1:N*(n + 1) + 1)));
A(n*N + 1,N*(n - 1) + 1:1:N*(n + 1) + 1) = W1 + L1.*(h/b44);
A(n*N + 2,N*(n - 1) + 1:1:N*(n + 1) + 1) = W2 + L2.*(h/b44);
A(n*N + 1,N*(n - 1) + 1) = 0;
A(n*N + 1,N*(n + 1) + 1) = A(n*N + 1,N*(n - 1) + 1);
A(n*N + 2,N*(n - 1) + 1) = 0;
A(n*N + 2,N*(n + 1) + 1) = A(n*N + 2,N*(n - 1) + 1);
for i = n*N:-1:2;
    j = 2:1:n*N;
    k = n*N+3:1:2*n*N+1;
    A(i,j) = (A(i+1,j)+A(i-1,j)+A(i,j+1)+A(i,j-1))/(2*(1+lambda^2));
    A(k,j) = (A(k+1,j)+A(k-1,j)+A(k,j+1)+A(k,j-1))/(2*(1+lambda^2));
end
hTabGroup = uitabgroup; drawnow;
tab1 = uitab(hTabGroup, 'title','Panel 1');
tab2 = uitab(hTabGroup, 'title','Panel 2');
G = axes('parent', tab2); surf(A);
uicontrol(tab2, 'String','Close', 'Callback','close(gcbf)');


function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
set(handles.edit1,'String','');
set(handles.edit2,'String','');
set(handles.edit3,'String','');
set(handles.edit4,'String','');
set(handles.edit5,'String','');
set(handles.edit6,'String','');
```

პროგრამის ინტერფეისი



<u>ზედაპირი</u>



ნახ. 4

დასკვნა:

მოცემულ საბაკალავრო ნაშრომში აგებულია <u>**ბზარებით შესუსტებული შედგენილი სხეულებისათვის დრეკადობის თეორიის ანტიბრტყელი ამოცანების**</u> მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმები, კონკრეტულად გამოვიყენეთ გამრუდებული ჰარმონიული დიფერენციალური განტოლებებისთვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის სასრულ-სხვაობიანი მეთოდი.

თავდაპირველად ალგორითმების გამოწერა მოხდა ჩემი ხელმძღვანელისა და ჩემს მიერ **ერთგვაროვანი** და **უბნობრივ-ერთგვაროვანი სხეულებისათვის** და შემდეგ ეტაპზე მოხდა ამ ალგორითმების კომპიუტერზე იმპლემენტაცია. გვაქვს პროგრამული კოდი და სამუშაო დაფა (პროგრამული ინტერფეისი). ჩვენი შემდგომი მიზანია გავაგრძელოთ ამ თემატიკაში მუშაობა, შედგენილი (უბნობნივ-ერთგვაროვანი) დეფექტიანი ფირფიტის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის კვლევა რიცხვითი მეთოდებით, კერძოდ ინტეგრალურ განტოლებათა და სასრულ-სხვაობიანი მეთოდებით, დავხვეწოთ პროგრამები, ავაგოთ უფრო სწრაფად კრებადი სათვლელი ალგორითმები და პროგრამის გამოთვები გავაუმჯობესოთ დროსთან მიმართებაში.

ამავე ნაშრომში მინდა დიდი მადლობა გადავუხადო ჩემ ხელმძღვანელს ბატონ **არჩილ პაპუკაშვილს** გაწეული შრომისათვის და თავდაუზოგავი დახმარებისათვის.

გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ უ ლ ი   ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

[1] **Bantsuri R.D.**, The first fundamental problem for piece-wise homogeneous orthotropic plane with a cut perpendicular to the line of interface. *Bulletin of the Academy of Sciences of the Georgian SSR,* v.91, N3, 1978, p. 569-572 (in Russian)

[2] **Ungiadze A.V.**, The first basic problem for piece-wise homogeneous plane with a semi-infinite crack perpendicular to the interface. *Bulletin of the Academy of Sciences of the Georgian SSR,* v.118, N2 , 1985, p. 297-299 (in Russian)

[3] **Panasyuk V.V.**, **Savruk M.P.**, **Datsishin A.P.** Stress distribution near cracks in plates and shells. *Kiev: "Naukova dumka",* 1976, p. 444 (in Russian)

[4] **Savruk M.P.**, Two-dimensional problems on elasticity for bodies with cracks. *Kiev: "Naukova dumka",* 1981, p. 324 (in Russian)

[5] **Tikhonenko L.Ya.**, **Sitnik V.A.**, A problem on elastic half-plane with a crack orthogonally penetrating an interface. *"Dynamical Systems",* 1985, issue 4, p. 45-52 (in Russian)

[6] **Onishchuk O.V.**, On one method of solution of integral equations and its application to the problem on bending a plate with cross-type inctusion. *PMM.* 1988, v. 52, issue 2, p. 269-283 (in Russian)

[7] **Agayan K.L.**, **Saakyan A.V.**, A Mixed problem for composite plane with a crack penetrating an interface. *Proceedings of II All-Union Conference on Theory of Elasticity. Tbilisi, "Metsniereba",* 1984, p. 4 (in Russian)

[8] **Bantsuri R.D.** and **Shavlakadze N.N.** The problem of the bending of a beam lying on an elastic base. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* Volume 69, Issue 2, 2005, pages 268-274.

[9] **Bantsuri R.D.** and **Shavlakadze N.N.** The contact problem for a piecewise-homogeneous plane with a semi-infinite inclusion. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* Volume 73, Issue 4, 2009, pages 471-477.

[10] **Papukashvili A.**, Unplane problems of theory of elasticity with cracks of slackened piecewice-homogeneous plane. *Reports of enlarged session of the seminar of I. Vekua institute applied mathematics.* v.15., No 1-3, Tbilisi 2000, p. 22-24

[11] **Papukashvili A.**, Antiplane problems of theory of elasticity for piecewice-homogeneous orthotropic plane slackened with cracks. *Bulletin of the Georgian Academy of Sciences,* 169, No. 2, 2004. p. 267-270.

[12] **Papukashvili A.**, **Manelidze G.** On approximate solution of one singular integral equation containing an immovable singularity. *Bulletin of the Georgian Academy of Sciences,* Vol. 172., No. 3.

[13] **Manelidze G.**, **Papukashvili A.**, Approximate solution of some linear boundary value problems by an approach alternative to asymptotic method. *Bulletin of the Georgian Academy of Sciences,* Vol. 174, No. 2, 2006, p. 234-237.