პოლინომიალური მატრიც-ფუნქციის სპექტრალური ფაქტორიზაციის ალგორითმის შესახებ

გიორგი რუხაია

ხელმძღვანელი: ლაშა ეფრემიძე

პოლინომიალური მატრიცის ფაქტორიზაცია

$$S(z) = \sum_{n=-N}^{N} C_n z^n \qquad C_n \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

$$S(z) = S^+(z)S^-(z), \quad S^+(z) = \sum_{n=0}^{N} A_n z^n$$

$$S^-(z) = \overline{S^+(1/\overline{z})}^T = \sum_{n=0}^{N} A_n^* z^{-n}$$

ერთგანზომილებიანი ფაქტორიზაცია

$$a(z) = \sum_{j=-m}^{m} a_j z^j, \; a_j = a_{-j} \in \mathbb{R}, \; -m \le j \le m$$

$$a(z) = \gamma(z)\gamma(z^{-1}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\gamma(z) = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j z^j \qquad \gamma_0 > 0$$

უილსონის მეთოდი

$$\mathcal{T}^{(k)}(\gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)}) = a(z) - \gamma^{(k)}(z)\gamma^{(k)}(z^{-1})$$

$$\mathcal{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} \gamma_0^{(k)} & \cdots & \cdots & \gamma_m^{(k)} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \gamma_0^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_0^{(k)} & \cdots & \cdots & \gamma_m^{(k)} \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \gamma_m^{(k)} & & & \end{bmatrix}$$

უილსონის მეთოდის ალტერნატიული ამოხსნის გზა

$$\mathcal{J}^{(k)}(\gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)}) = a(z) - \gamma^{(k)}(z)\gamma^{(k)}(z^{-1})$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma^{(k)}(z)(\gamma^{(k+1)}(z^{-1}) - \gamma^{(k)}(z^{-1})) + \gamma^{(k)}(z^{-1})(\gamma^{(k+1)}(z) - \gamma^{(k)}(z) = a(z) - \gamma^{(k)}(z)\gamma^{(k)}(z^{-1}),$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma^{(k)}(z)\gamma^{(k+1)}(z^{-1}) + \gamma^{(k)}(z^{-1})\gamma^{(k+1)}(z) = a(z) + \gamma^{(k)}(z)\gamma^{(k)}(z^{-1})$$

უილსონის მეთოდის ალტერნატიული ამოხსნის გზა

$$b(z) = \sum_{j=-m}^{m} b_j z^j,\ b_j = b_{-j} \in \mathbb{R},\ -m \le j \le m$$

$$\sigma(z) = \sum_{j=0}^{m} \sigma_j z^j,\ \sigma_j \in \mathbb{R},$$

$$\sigma(z)\alpha(z^{-1}) + \sigma(z^{-1})\alpha(z) = b(z)$$

უილსონის მეთოდის ალტერნატიული ამოხსნის გზა

$$\frac{\alpha(z^{-1})}{\sigma(z^{-1})}+\frac{\alpha(z)}{\sigma(z)}=\frac{b(z)}{\sigma(z)\sigma(z^{-1})}$$

$g(z)=\dfrac{\alpha(z)}{\sigma(z)}$ ანალიზურია $\{z\in\mathbb{C}:|z|<|\nu|\}$ -ზე!

$$g(z)+g(z^{-1})=\frac{\alpha(z^{-1})}{\sigma(z^{-1})}+\frac{\alpha(z)}{\sigma(z)}=\sum_{i\in\mathbb{Z}}g_{|i|}z^i.$$

$$h(z)=\frac{1}{\sigma(z)\sigma(z^{-1})}=\sum_{i\in\mathbb{Z}}h_{|i|}z^i,$$

იშლებიან ლორენცის მწკრივად $\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{|\nu|}<|z|<|\nu|\}$ -ზე!

უილსონის მეთოდის ალტერნატიული ამოხსნის გზა

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & \cdots & \cdots & h_{2m} \\ h_1 & h_0 & h_1 & & & h_{2m-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{2m-1} & \cdots & \cdots & h_1 & h_0 & h_{11} \\ h_{2m} & \cdots & \cdots & \cdots & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m \\ \vdots \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_m \\ \vdots \\ g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

ვიპოვოთ მატრიცი!

უილსონის მეთოდის ალტერნატიული ამოხსნის გზა

$$H_k^{-1} = (\sigma(Z_k))^T \sigma(Z_k) - \widehat{\sigma}(Z_k)(\widehat{\sigma}(Z_k))^T$$

$$\widehat{\sigma}(z) = z^k \sigma(z^{-1})$$

საწყისი ამოცანის ტერმინებში:

$$\mathcal{P}^{(k)} = (\gamma^{(k)}(Z_{2m+1}))^T \gamma^{(k)}(Z_{2m+1}) - \widehat{\gamma}^{(k)}(Z_{2m+1})(\widehat{\gamma}^{(k)}(Z_{2m+1}))^T$$

$$\mathcal{P}^{(k)} h^{(k)} = e_1$$

ალგორითმი

k=0,1,2...imax (imax მაქსიმალური რაოდენობა იტერაციებისა)

1. გამოვთვალოთ $h^{(k)}$ ვექტორი, როგორც $P^{(\mathrm{k})}$-ს შებრუნებულის პირველი სვეტი, ანუ ამოვხსნათ სისტემა $P^{(\mathrm{k})}h^{(k)}=e_1$, კონდენსირებული გრადიენტის მეთოდით და კონდენსატორი $H^{(\mathrm{k})}$-თი (ანუ $H^{(\mathrm{k})}$ არის $P^{(\mathrm{k})}$-ს შებრუნებულის მიახლოება).
2. გამოვთვალოთ $b^{(\mathrm{k})}(\mathrm{z})=a(\mathrm{z})+\gamma^{(\mathrm{k})}(\mathrm{z})\gamma^{(\mathrm{k})}(\mathrm{z}^{-1})$
3. გამოვთვალოთ $g(\mathrm{z})$ როგორც $H^{(\mathrm{k+1})}b$ ვექტორის პირველი m კოეფიციენტის მქონე პოლინომი (g_0 ანუ პირველი კოეფიციენტი უნდა გავანახევროთ).

ავაგოთ ახალი მიახლოება $\gamma^{(\mathrm{k+1})}(\mathrm{z})=g(\mathrm{z})\gamma^{(\mathrm{k})}(\mathrm{z})$ და დავტოვოთ ნამრავლის პირველი m+1 კოეფიციენტი.

ხოლეცკის ფაქტორიზაცია

$$A > 0 \to A = LDL^{*} \quad L$$ ქვედასამკუთხაა

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad b_{k1} = a_{k1}/\sqrt{a_{11}}^{*}, \quad k = 2, 3, \ldots, m,$$

$$b_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} b_{nj}^{*}}, \quad b_{kn} = \left(a_{kn} - \sum_{j=1}^{n-1} b_{kj} b_{nj}^{*} \right) / b_{nn}^{*},$$

$$n = 2, 3, \ldots, m, \quad k = n+1, \ldots, m.$$

ხოლეცკის ფაქტორიზაცია

$$A \geq 0 \rightarrow A = LDL^{*} \quad L$$ ქვედასამკუთხაა

მაგრამ თუ წამყვანი ელემენტი ნულია?!

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad b_{k1} = a_{k1} / \sqrt{a_{11}}^{\,*}, \quad k = 2, 3, \ldots, m,$$

$$b_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} b_{nj}^{*}}, \quad b_{kn} = \left(a_{kn} - \sum_{j=1}^{n-1} b_{kj} b_{nj}^{*} \right) / b_{nn}^{*},$$

$$n = 2, 3, \ldots, m, \quad k = n + 1, \ldots, m.$$

ხოლეცკის ფაქტორიზაცია

ლემა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & L^* \\ L & A_0 \end{pmatrix} \geq 0 \rightarrow A_0 - La_{11}L^* \geq 0$$

დამტკიცების გზა:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -La_{11}{}^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & L^* \\ L & A_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -L^*a_{11}{}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_0 - La_{11}L^* \end{pmatrix}$$

ალგორითმი

1. ჩავატაროთ ხოლეცკის ფაქტორიზაცია სადაც ფესვის ამოღება განიმარტება როგორც ერთგანზომილებიანი ფაქტორიზაცია.

   მივიღებთ $S(z) = S_0^+(z)S_0^-(z)$ სადაც $S_0^+(z)$ წრის შიგნით ანალიზური, რაციონალური ფუნქციაა.

2. თუ $S_0^+(z)$ მატრიცის s_{ij} ელემენტს აქვს l რიგის პოლუსი წრის შიგნით რაიმე a წერტილში, მაშინ ყოველი a სთვის მას გავამრავლებთ უნიტარულ მატრიცზე სადაც jj ადგილას არის $u(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$ ხოლო მატრიცია $U(z) = \mathrm{diag}[1, \dots, u^l(z), \dots, 1]$ ახალი მატრიცი კვლავ იქნება ფაქტორიზაციის თვისების მქონე.

3. მიღებულ მატრიცს თუ წრის შგნით აქვს ნულები, ანუ მისი დეტერმინანტი ნულდება რაიმე a წერტილში, მაშინ გავამრავლოთ ისეთ უნიტარულ მატრიცზე რომ ყველა 0 პირველ სტრიქონში მოხვდეს და შემდეგ გავამრავლოთ $\mathrm{diag}[u(z), 1, \dots, 1]$ მატრიცზე სადაც $u(z) = (1-\overline{a}z)/(z-a)$.

გმადლობთ ყურადღებისთვის!