ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი გოგნაძე

ფურიეს ლაკუნარული მწკრივების შესახებ

(საბაკალავრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოც. პროფ.
ფიზ. მათ. მეც. დოქ. თეიმურაზ ახობაძე

2014 წელი

§1 შესავალი

ვთქვათ f ფუნქცია 2π -პერიოდულია და

(1.1)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{n_k}\cos n_k x+b_{n_k}\sin n_k x\right)$$

არის $f\in L[-\pi,\pi]$ ფუნქციის ფურიეს ლაკუნარული მწკრივი უსასრულო „ნახტომებით“ $\left(n_k,n_{k+1}\right)$, სადაც $\{n_k\}$ $(k\in\mathbf{N})$ მკაცრად ზრდადი ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობაა. ვთქვათ $x_0\in[-\pi,\pi]$ ფიქსირებული წერტილია, ვიტყვით რომ $\omega(u)$ $\left(u\in R,u>0\right)$ არის f -ის უწყვეტობის მოდული x_0 წერტილში, თუ

$$\omega(u)=\sup_{0\le|t|\le u}\left|f(x_0+t)-f(x_0)\right|.$$

ვთქვათ, აგრეთვე, $\omega^*(u)$ არის ისეთი ფუნქცია, რომ

1) $\omega^*(0)=0,\ \omega^*(t)>0,$ როცა $t\to+0;$

2) $\omega^*(t_1)\le A\omega^*(t_2),$ როცა $0<t_1<t_2;$

3) არსებობს $\alpha>0$ ისეთი, რომ

$$\omega^*(t_1)t_1^{-\alpha}\ge B\omega^*(t_2)t_2^{-\alpha},\ \text{სადაც}\ 0<t_1<t_2.$$

(იგულისხმება, რომ A და B დადებითი მუდმივებია).

კარგად არის ცნობილი დებულებები ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტების ყოფაქცევის შესახებ. კოეფიციენტების რიგი განპირობებულია ფუნქციის სხვადასხვა გლობალური თვისებებით (მაგალითად, პირობები უწყვეტობის ან ინტეგრალურ მოდულებზე).

ნობელმა [1] (Nobel) დასვა შემდეგი პრობლემა: თუ f ფუნქციის რომელიმე თვისების შესრულება $[-\pi,\pi]$ ინტერვალზე იწვევს რაიმე დასკვნის გაკეთების საშუალებას f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის შესახებ, მაშინ $\sigma(f)$-ის რა ლაკუნარობა იძლევა გარანტიას მსგავსი დასკვნის გაკეთებისთვის, როცა მოთხოვნილი თვისება სრულდება მხოლოდ ლოკალურად. პრობლემის შესწავლისას ტომიკმა [2] (Tomic) დაამტკიცა შემდეგი

თეორამა ა). თუ

$$\omega(\delta) = O(\delta^{\alpha}),\ 0 < \alpha < 1,$$

და $\{n_k\}$ აკმაყოფილებს ადამარის (Hadamar) ლაკუნარობას:

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1, \tag{1.2}$$

მაშინ (1.1) ფურიეს ლაკუნარული მწკრივისათვის გვაქვს

$$a_{n_k}, b_{n_k} = O(n_k^{-\beta}),\quad \beta = \alpha/(2+\alpha).$$

ტომიკმა [3] დაამტკიცა უფრო ზოგადი

თეორემა ბ). თუ f ფუნქცია იშლება ფურიეს მწკრივად, სადაც $\{n_k\}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს ადამარის პირობას, და

$$f(x_0 \pm t) - f(x_0) = O(1)\omega^*(t),\ \text{როცა}\ t \to +0,$$

($\omega^*(t)$ ზემოთ აღნიშნული ფუნქციაა), მაშინ

$$a_{n_k}, b_{n_k} = O(1)\omega^*(1/n_k),$$

როცა $0 < \alpha < 1,$ და

$$a_{n_k}, b_{n_k} = O(1)\omega^*(1/n_k)\log n_k,$$

თუ $\alpha = 1.$

პატადიას [4] (J.R. Patadia) სტატიაში განზოგადოებულია **თეორემა ბ)** უფრო ზოგადი პირობით:

$$\min\{n_{k+1} - n_k, n_k - n_{k-1}\} \ge CF(n_k), \tag{1.3}$$

სადაც $F(n_k)$ ზრდადია $+\infty$-სკენ, როცა $k \to \infty$, $F(n_k) \le n_k$ ყოველი $k \in \mathbf{N}-$თვის, ამასთან C დადებითი მუდმივია. კერძოდ, მან დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა A. თუ

$$f(x_0 \pm t) - f(x_0) = O(1)\omega^*(t),\ \text{როცა}\ t \to +0,$$

სადაც $\omega^*(t)$ აკმაყოფილებს 1), 2) და 3) პირობებს და, ამასთან, თუ $\{n_k\}$-სათვის სამართლიანია (1.3), მაშინ

$$a_{n_k}, b_{n_k} = O(1)\omega^*(1/F(n_k)\,.$$

ამავე შრომაში მან დაამტკიცა დებულება ლაკუნარული მწკრივების აბსოლუტური კრებადობის შესახებ.

თეორემა B. თუ $f(x_0 \pm t) - f(x_0) = O(1)\omega^*(t),$ როცა $t \to +0$ და

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\omega^*(1/F(n))^r\right)}{n^{r/2}(F(n))^{1-r}} < \infty \quad (0 < r < 1),$$

სადაც $\{n_k\}$ აკმაყოფილებს (1.3) პირობას, მაშინ

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\left|a_{n_k}\right|^r + \left|b_{n_k}\right|^r\right) < \infty\,.$$

ჩვენი მიზანია თეორემა A და თეორემა B-ს ანალოგების დამტკიცება ორჯერადი ლაკუნარული მწკრივებისათვის.

§2 შედეგების ფორმურილება

განვსაზღვროთ $\omega^*(s,t)$ ფუნქცია :

$i)$ $\omega^*(0,0) = 0, \omega^*(s,t) > 0$, $0 < t_1 < t_2 \to 0;$

$ii)$ $\omega^*(s,t_1) \le A\omega^*(s,t_2),\ 0 < t_1 < t_2 \to 0;$

$\omega^*(s_1,t) \le B\omega^*(s_2,t), 0 < s_1 < s_2 \to 0\,;$

$iii)$ ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს $\alpha, \beta > 0$ ისეთი, რომ

$$\omega^*(s,t_1)t_1^{-\alpha} \ge C\omega^*(s,t_2)t_2^{-\alpha},\ 0 < t_1 < t_2,$$

$$\omega^*(s_1,t)s_1^{-\beta} \ge D\omega^*(s_2,t)s_2^{-\beta},\ 0 < s_1 < s_2;$$

A, B, C, D მუდმივებია, ამასთან, უკანასკნელი შეფასებები სრულდება თანაბრად t-სა და s-ის მიმართ. ვიგულისხმოთ, აგრეთვე, რომ ორი ცვლადის f ფუნქციას გააჩნია ლაკუნარული მწკრივი, რომლისთვისაც

(2.1)
$$\min\left\{n_{k+1}-n_k, n_k-n_{k-1}\right\} \geq C'F(n_k),$$

$$\min\left\{m_{j+1}-m_j, m_j-m_{j-1}\right\} \geq C''F(m_j),$$

სადაც $F(n_k)$, $F(m_j)$ იზრდება $+\infty$-სკენ, როცა, $k, j \to \infty$. $F(n_k) \leq n_k$; $F(m_j) \leq m_j$ ყოველი $k, j \in \mathbf{N}-$თვის; C', C'' დადებითი მუდმივებია.

თეორემა 1. ვთქვათ

$$f\left(x_0+s, y_0+t\right)-f\left(x_0+s, y\right)-f\left(x, y_0+t\right)+f\left(x_0, y_0\right)=O(1)\omega^*(s,t), \text{ როცა } s,t \to 0,$$

სადაც $\omega^*(s,t)$ აკმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ პირობებს, ამასთან, $\{n_k\}$-თვის და $\{m_j\}$-თვის სამართლიანია (2.1) პირობები. მაშინ

$$C_{m_j,n_k} = O(1)\left(\frac{1}{F(m_j)F(n_k)}\right).$$

თეორემა 2. ვთქვათ

$$f\left(x_0+s, y_0+t\right)-f\left(x_0+s, y\right)-f\left(x, y_0+t\right)+f\left(x_0, y_0\right)=O(1)\omega^*(s,t), \text{ როცა } s,t \to 0,$$

და

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^*(1/F(n),1/F(m))^r}{n^{r/2}m^{r/2}F(n)^{1-r}F(m)^{1-r}} < \infty, \ 0<r<1.$$

თუ $\{m_k\}, \{n_k\}$ აკმაყოფილებს (2.1) პირობებს, მაშინ

$$\sum_{(p,q)\in\mathbf{Z}} C^r_{m_p,n_q} < \infty,$$

სადაც $C_{m,n}$ არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი.

§3. შედეგების დამტკიცება

თეორემა 1-ის დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\omega^*(s,t)$ განსაზღვრულია $(0,\pi)\times(0,\pi)$-ზე და აკმაყოფილებს პირობებს: $i), ii), iii)$, ამასთან $x_0 = t_0 = 0$. $\lambda, \beta > 1$-სათვის გვაქვს:

$$\frac{\omega^*(s,t)}{B'} \le \omega^*(\lambda s,t) \le \frac{\lambda^\beta \omega^*(s,t)}{B''}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\omega^*(s,t)}{A'} \le \omega^*(s,\lambda t) \le \frac{\lambda^\alpha \omega^*(s,t)}{A''}.$$

ვთქვათ C_{m_j,n_k} არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები:

$$C_{m_j,n_k} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy,$$

სადაც $T_{M_j}(x)$, $T_{N_k}(y)$ ტრიგონომეტრიული პოლინომებია ხარისხებით $M_j = [C'F(m_j)]$ და $N_k = [C''F(n_k)]$. შევნიშნოთ, რომ

$$C_{m_j,n_k} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy;$$

$$C_{m_j,n_k} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_j\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)+n_ky\right)}dxdy;$$

$$C_{m_j,n_k} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x,y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)e^{-i\left(m_jx+n_k\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right)}dxdy;$$

$$C_{m_j,n_k} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}\left((y+\frac{\pi}{n_k})\right)e^{-i\left(m_j\left((x+\frac{\pi}{m_j}\right)+n_k\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right)}dxdy.$$

ამ ოთხივე გამოსახულების შეკრებით მივიღებთ:

$$C_{m_j,n_k} = \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy +$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)T_{M_j}\left((x+\frac{\pi}{m_j})\right)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_j\left((x+\frac{\pi}{m_j}\right)+n_ky\right)}dxdy +$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left((x,y+\frac{\pi}{n_k}\right)e^{-i\left(m_jx+n_k\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right)}T_{M_j}(x)T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)dxdy +$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)e^{-i\left(m_j\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)+n_k\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right)}T_{m_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{n_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)dxdy =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

განვიხილოთ უკანასკნელი ჯამის პირველი ორი შესაკრები. გვაქვს:

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy -$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)T_{M_j}\left((x+\frac{\pi}{m_j})\right)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy +$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy =$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x,y)-f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy +$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)\left(T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)-T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}(y)\right)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x,y)-f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy =$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy - \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i(m_jx+n_ky)}dxdy.$$

ამრიგად,

$$C_{m_j,n_k}=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy-$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x,y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy+$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)e^{-i\left(m_jx++n_ky\right)}dxdy.$$

ახლა დავაჯგუფოთ პირველი და მესამე შესაკრებები:

$$J_1+J_2=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x,y+\frac{\pi}{m_k}\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy\ .$$

მაშასადამე,

$$C_{m_j,n_k}=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{n_j},y\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy-$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x,y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy+$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x+\frac{\pi}{m_j})T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)e^{-i\left(m_jx++n_ky\right)}dxdy.$$

ამჯერად დავაჯგუფოთ პირველი და მეოთხე შესაკრებები, ე.ი.

$$J_1+J_4=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x+\frac{\pi}{m_j})T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)e^{-i\left(m_jx++n_ky\right)}dxdy=$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy-$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy+$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy+$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy=$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x,y)+f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy+$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)\left(T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)-T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)\right)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy=$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x,y)+f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy=$$

$$=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy+$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy\,.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)-T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)=$$

$$=T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)-T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)+$$

$$+T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}(y)-T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}(y)=$$

$$=\left(T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)-T_{M_j}(x+\frac{\pi}{m_j})T_{N_k}(y)\right)$$

$$+\left(T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)T_{N_k}(y)-T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)\right)=$$

$$=\left(T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)\left(T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)-T_{N_k}(y)\right)\right)+$$

$$=\left(T_{M_j}\left(x+\frac{\pi}{m_j}\right)\left(T_{N_k}\left(y+\frac{\pi}{n_k}\right)-T_{N_k}(y)\right)\right)=0$$

ამრიგად,

$$C_{m_j,n_k}=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy-$$

$$-\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{n_j},y\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy-$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x,y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy+$$

$$+\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx++n_ky\right)}dxdy\,.$$

ინტეგრალის ადიციურობის გამო უკანასკნელი გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$C_{m_j,n_k}=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x,y)-f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)-f\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy=$$

$$=\left(\int_{-\frac{1}{M_j}}^{\frac{1}{M_j}}\int_{-\frac{1}{N_k}}^{\frac{1}{N_k}}+\int_{-\frac{1}{M_j}}^{\frac{1}{M_j}}\int_{\frac{1}{N_k}}^{\pi}+\int_{-\frac{1}{M_j}}^{\frac{1}{M_j}}\int_{-\pi}^{-\frac{1}{N_k}}+\int_{\frac{1}{M_j}}^{\pi}\int_{-\frac{1}{N_k}}^{\frac{1}{N_k}}+\int_{\frac{1}{M_j}}^{\pi}\int_{\frac{1}{N_k}}^{\pi}+\int_{\frac{1}{M_j}}^{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{1}{N_k}}+\int_{-\pi}^{-\frac{1}{M_j}}\int_{-\frac{1}{N_k}}^{\frac{1}{N_k}}+\int_{-\pi}^{-\frac{1}{M_j}}\int_{\frac{1}{N_k}}^{\pi}+\int_{-\pi}^{-\frac{1}{M_j}}\int_{-\pi}^{-\frac{1}{N_k}}\right)\times$$

$$\times\left(f(x,y)-f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right)-f\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right)T_{M_j}(x)T_{N_k}(y)e^{-i\left(m_jx+n_ky\right)}dxdy=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6+I_7+I_8+I_9.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\left| f(x,y) - f(x+\frac{\pi}{m_j},y) - f(x,y+\frac{\pi}{n_j}) + f(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}) \right| \le$$

$$\le \left| f(0,0) - f(x,y) - f(x,y) + f(x,y) \right| +$$

$$+ \left| f(0,0) - f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right) - f\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right) + f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_j}\right) \right| +$$

$$+ \left| - f(0,0) + f(x,y) + f\left(0,y+\frac{\pi}{n_j}\right) - f\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right) \right| +$$

$$+ \left| - f(0,0) + f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right) + f(x,y) - f\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right) \right| =$$

$$= O(1)\omega^*(x,y) + O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right) + O(1)\omega^*\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right) + O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_j}\right).$$

ამასთან, $\frac{\pi}{m_j} < \frac{\pi}{M_j}$, $\frac{\pi}{n_k} < \frac{\pi}{N_k}$. ამიტომ

1) თუ $|x| \le \frac{1}{M_j}$, $|y| \le \frac{1}{N_k}$, მაშინ

$$\left| f(x,y) - f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right) - f\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right) + f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right) \right| =$$

$$= O(1)\,\omega^*(x,y) + O(1)\,\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right) + O(1)\,\omega^*\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right) +$$

2) თუ $|x| \le \frac{1}{M_j}, |y| > \frac{1}{N_k}$, მაშინ:

$$\left| f(x,y) - f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right) - f\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right) + f\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_k}\right) \right| =$$

$$O(1)\,\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j},y+\frac{\pi}{n_j}\right) = O(1)\,\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right);$$

$$O(1)\,\omega^*(x,y) + O(1)\,\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j},y\right) + O(1)\,\omega^*\left(x,y+\frac{\pi}{n_j}\right) +$$

$$O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j}, y+\frac{\pi}{n_j}\right)=O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j}, y\right)=O(1)\,y^{\beta}N_k^{\beta}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right);$$

3) თუ $|x|>\dfrac{1}{M_j}$, $|y|\le\dfrac{1}{N_k}$, მაშინ:

$$\left|f(x,y)-f\left(x+\frac{\pi}{m_j}, y\right)-f\left(x, y+\frac{\pi}{n_j}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{m_j}, y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right|=$$

$$O(1)\omega^*(x,y)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j}, y\right)+O(1)\omega^*\left(x, y+\frac{\pi}{n_j}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j}, y+\frac{\pi}{n_j}\right)=$$

$$=O(1)\omega^*\left(x,\frac{1}{N_k}\right)=O(1)\,x^{\alpha}M_j^{\alpha}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right);$$

4) თუ $|x|>\dfrac{1}{M_j}$, $|y|>\dfrac{1}{N_k}$, მაშინ:

$$\left|f(x,y)-f\left(x+\frac{\pi}{m_j}, y\right)-f\left(x, y+\frac{\pi}{n_j}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{m_j}, y+\frac{\pi}{n_k}\right)\right|=$$

$$O(1)\omega^*(x,y)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j}, y\right)+O(1)\omega^*\left(x, y+\frac{\pi}{n_j}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{m_j}, y+\frac{\pi}{n_j}\right)=$$

$$=O(1)\omega^*(x,y)=O(1)\,x^{\alpha}y^{\beta}M_j^{\alpha}N_k^{\beta}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right).$$

შემთხვევა 1). ვთქვათ (iii)-ში $0<\alpha,\beta<1$, მაშინ $T_{M_j}(x)=2K_{M_j}(x)$, $T_{N_k}(y)=2K_{N_k}(y)$, სადაც $K_{M_j}(x)$ და $K_{N_k}(y)$ არის M_j, N_k რიგის ფეიერის გულები. ამრიგად,

5) $\left|T_{M_j}(x)\right|=\dfrac{\sin^2\left(\left(M_j+1\right)\frac{x}{2}\right)}{\left(M_j+1\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\le B'M_j$, $\qquad \left|T_{N_k}(y)\right|=\dfrac{\sin^2\left(\left(N_k+1\right)\frac{y}{2}\right)}{\left(N_k+1\right)\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\le B''N_k$,

6) $\left|T_{M_j}(x)\right|\le\dfrac{D'}{x^2M_j}$, $\left|T_{N_k}(y)\right|\le\dfrac{D''}{y^2N_k}$.

1) -დან და 5) – დან მივიღებთ, რომ

$$|I_1| = \int_{-\frac{1}{M_j}}^{\frac{1}{M_j}} \int_{-\frac{1}{N_k}}^{\frac{1}{N_k}} O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\left|T_{M_j}(x)\right|\left|T_{N_k}(y)\right| dxdy =$$

$$O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)C'M_j C''N_k \frac{2}{M_j}\frac{2}{N_k} = O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right).$$

2) , 5) და 6) -დან გვექნება :

$$|I_2| = \int_{-\frac{1}{M_j}}^{\frac{1}{M_j}} \int_{-\frac{1}{N_k}}^{\pi} O(1) y^{\beta} N_k^{\beta} \omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\left|T_{M_j}(x)\right|\left|T_{N_k}(y)\right| dxdy =$$

$$= \int_{-\frac{1}{N_k}}^{\pi} O(1) y^{\beta} N_k^{\beta} \omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right) C'M_j \frac{2}{M_j}\frac{D''}{y^2 N_k} dy =$$

$$= O(1) N_k^{\beta-1}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\int_{-\frac{1}{N_k}}^{\pi} y^{\beta-2} dy =$$

$$= O(1) N_k^{\beta-1}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\left(\left.\frac{y^{\beta-1}}{\beta-1}\right|_{-\frac{1}{N_k}}^{\pi}\right) =$$

$$= O(1) N_k^{\beta-1}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\left(\frac{\pi^{\beta-1}}{\beta-1} - \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(N_k)^{\beta-1}}\right) \le$$

$$\le O(1) N_k^{\beta-1}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\left(\frac{\pi n_k^{\beta-1}}{\beta-1}\frac{1}{(N_k)^{\beta-1}} - \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(N_k)^{\beta-1}}\right) =$$

$$= O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)$$

$|I_2|$ -ის შეფასების ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$|I_3| = O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right).$$

თუ გავითვალისწინებთ 3) , 5) და 6), გვექნება:

$$|I_4|=\int_{\frac{1}{M_j}}^{\pi}\int_{-\frac{1}{N_k}}^{\frac{1}{N_k}} O(1)x^{\alpha}M_j^{\alpha}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\left|T_{M_j}(x)\right|\left|T_{N_k}(y)\right|dxdy=$$

$$=\int_{-\frac{1}{N_k}}^{\pi} O(1)x^{\alpha}M_j^{\alpha}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)C''N_k\frac{2}{N_k}dx=$$

$$=O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)$$

თუ გავითვალისწინებთ 4), 5) და 6) –ს მივიღებთ:

$$|I_5|=\int_{\frac{1}{M_j}}^{\pi}\int_{\frac{1}{N_k}}^{\pi} O(1)x^{\alpha}y^{\beta}M_j^{\alpha}N_k^{\beta}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\left|T_{M_j}(x)\right|\left|T_{N_k}(y)\right|dxdy=$$

$$=\int_{\frac{1}{M_j}}^{\pi}\int_{\frac{1}{N_k}}^{\pi} O(1)x^{\alpha}y^{\beta}M_j^{\alpha}N_k^{\beta}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\frac{D'}{x^2M_j}\frac{D''}{y^2N_k}dxdy=$$

$$=O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)M_j^{\alpha}N_k^{\beta}\int_{\frac{1}{M_j}}^{\pi}\int_{\frac{1}{N_k}}^{\pi}x^{\alpha-2}y^{\beta-2}dxdy=$$

$$=O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right).$$

$|I_6|,|I_8|,|I_9|$–ის შეფასებები $|I_5|$-ის ანალოგიურია, ხოლო $|I_7|$-ის შეფასებები – $|I_4|$-ის. გავითვალისწინებთ რა (3.1)–ს და უტოლობებს:

$$\frac{1}{M_j}\geq\frac{1}{F(m_j)}\geq\frac{1}{M_j+1},\ \frac{1}{N_k}\geq\frac{1}{F(n_k)}\geq\frac{1}{N_k+1},$$

მივიღებთ:

$$C_{m_jn_k}=O(1)\left(\frac{1}{F(m_j)F(n_k)}\right).$$

შემთხვევა 2).

ვთქვათ (iii)-ში $\alpha,\beta>1$, ვიგულისხმოთ, რომ

$$T_{M_j}(x)=\frac{\left(2K_M\ (x)\right)^p}{\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(2K_M\ (x)\right)^p dx\right)},$$

$$T_{N_k}(y)=\frac{\left(2K_N\ (y)\right)^q}{\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(2K_N\ (y)\right)^q dy\right)},$$

სადაც $K_M(x)$ და $K_N(y)$ არის $M=\lfloor M_j/p\rfloor$, $N=\left[N_k/q\right]$ რიგის ფეიერის გულები, ამასთან $\alpha+1-2p<0$, $\beta+1-2q<0.$

გვაქვს:

(3.2) $$\left|T_{M_j}(x)\right|\le E'M_j,\quad \left|T_{N_k}(y)\right|\le E''N_k,$$

$$\left|T_{M_j}(x)\right|\le F'M_j^{1-2p}x^{-2p},\qquad \left|T_{N_k}(y)\right|\le F''N_k^{1-2q}y^{-2q},$$

სადაც E',E'',F',F'' მუდმივებია. პირველი შემთხვევის ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\left|I_i\right|=O(1)\left(\frac{1}{F(m_j)F(n_k)}\right),\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2-ის დამტკიცება. ვთქვათ

(3.3) $$F_{j,k}(x,y)=$$

$$=f\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)-$$
$$-f\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)$$

განვიხილოთ (3.3) გამოსახულების პირველი ორი შესაკრები

$$f_j(x,y)=f\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right),$$

მაშინ

$$f_j(x,y)=$$

$$=\sum_{(p,q)\in Z^2} C_{m_p,n_q}\left(\exp\left(im_j\left(x+\frac{\pi}{4m_p}\right)\right)\exp\left(in_k\left(y+\frac{\pi}{4n_q}\right)\right)-\exp\left(im_j\left(x-\frac{\pi}{4m_p}\right)\right)\exp\left(in_k\left(y+\frac{\pi}{4n_q}\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{(p,q)\in Z^2} C_{m_p,n_q}\exp(im_jx)\exp(in_ky)\exp\left(in_k\frac{\pi}{4n_q}\right)\left(\exp\left(im_j\frac{\pi}{4m_p}\right)-\exp\left(-im_j\frac{\pi}{4m_p}\right)\right)=$$

$$=\sum_{(p,q)\in Z^2} C_{m_p,n_q}\exp(im_jx)\exp(in_ky)\exp\left(in_k\frac{\pi}{4n_q}\right)2i\sin\left(m_j\frac{\pi}{4m_p}\right).$$

განვიხილოთ (3.3) გამოსახულების ბოლო ორი შესაკრები

$$f_k(x,y)=-f\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)$$

გვაქვს

$$f_k(x,y)=$$

$$=\sum_{(p,q)\in Z^2} C_{m_p,n_q}\left(-\exp\left(im_j\left(x+\frac{\pi}{4m_p}\right)\right)\exp\left(in_k\left(y-\frac{\pi}{4n_q}\right)\right)+\exp\left(im_j\left(x-\frac{\pi}{4m_p}\right)\right)\exp\left(in_k\left(y-\frac{\pi}{4n_q}\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{(p,q)\in Z^2} C_{m_p,n_q}-\exp(im_jx)\exp(in_ky)\exp\left(-in_k\frac{\pi}{4n_q}\right)\left(\exp\left(im_j\frac{\pi}{4m_p}\right)-\exp\left(-im_j\frac{\pi}{4m_p}\right)\right)=$$

$$=\sum_{(p,q)\in Z^2} C_{m_p,n_q}-\exp(im_jx)\exp(in_ky)\exp\left(-in_k\frac{\pi}{4n_q}\right)2i\sin\left(m_j\frac{\pi}{4m_p}\right).$$

ამრიგად,

$$F_{j,k}(x,y)=$$

$$=\sum_{(p,q)\in Z^2} C_{m_p,n_q}\exp(im_jx)\exp(in_ky)\exp\left(in_k\frac{\pi}{4n_q}\right)2i\sin\left(m_j\frac{\pi}{4m_p}\right)-$$

$$-\exp(im_jx)\exp(in_ky)\exp\left(-in_k\frac{\pi}{4n_q}\right)2i\sin\left(m_j\frac{\pi}{4m_p}\right)=$$

$$=\sum_{(p,q)\in Z^2} C_{m_p,n_q}\exp(im_jx)\exp(in_ky)2i\sin\left(m_j\frac{\pi}{4m_p}\right)\left(\exp\left(in_k\frac{\pi}{4n_q}\right)-\exp\left(-in_k\frac{\pi}{4n_q}\right)\right)=$$

$$=-4\sum_{(p,q)\in Z^2} C_{m_p,n_q}\exp(im_jx)\exp(in_ky)\sin\left(m_j\frac{\pi}{4m_p}\right)\sin\left(n_k\frac{\pi}{4n_q}\right).$$

ბესელის უტოლობის გამოყენებით უკანასკნელი გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$16\sum_{p=m_j}^{2m_j}\sum_{q=n_k}^{2n_k}\left|C_{m_p,n_q}\right|^2\sin\left(m_j\frac{\pi}{4m_p}\right)^2\sin\left(n_k\frac{\pi}{4n_q}\right)^2\le\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F_{j,k}(x,y)\right)^2T_{M_j}(x)^2T_{N_k}(y)^2\,dxdy$$

მაშასადამე,

(3.4)
$$\sum_{p=m_j}^{2m_j}\sum_{q=n_k}^{2n_k}\left|C_{m_p,n_q}\right|^2\le$$

$$\le\left(\int_{|x|\le\frac{1}{M_j}}\int_{|y|\le\frac{1}{N_k}}+\int_{|x|<\frac{1}{M_j}}\int_{|y|>\frac{1}{N_k}}+\int_{|x|>\frac{1}{M_j}}\int_{|y|<\frac{1}{N_k}}+\int_{|x|\ge\frac{1}{M_j}}\int_{|y|\ge\frac{1}{N_k}}\right)\left(F_{j,k}(x,y)\right)^2T_{M_j}(x)^2T_{N_k}(y)^2\,dxdy=$$

$$=J_1+J_2+J_3+J.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ

$x-\frac{\pi}{4m_j}=u,\ y-\frac{\pi}{4n_k}=v$, მაშინ ω^* ფუნქციის თვისებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left|F_{j,k}(x,y)\right|=$$

$$=\left|f\left(u+2\frac{\pi}{4m_j},v+2\frac{\pi}{4n_k}\right)-f\left(u,v+2\frac{\pi}{4n_k}\right)-f\left(u+2\frac{\pi}{4m_j},v\right)+f(u,v)\right|=$$

$$=O(1)\omega^*(u,v)+O(1)\omega^*\left(u+2\frac{\pi}{4m_j},v\right)++O(1)\omega^*\left(u,v+2\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(u+\frac{\pi}{4m_j},v+2\frac{\pi}{4n_k}\right)=$$

$$=O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+$$

$$+O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right).$$

ვთქვათ $T_{M_j}(x)=2K_{M_j}(x)$, $T_{N_k}(y)=2K_{N_k}(y)$, სადაც $K_{M_j}(x)$ და $K_{N_k}(y)$ არის M_j, N_k რიგის ფეიერის გულები. მაშინ, თუ $|x|\le\frac{1}{M_j}$, $|y|\le\frac{1}{N_k}$, მივიღებთ

$$O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+$$

$$+O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)=$$

$$=O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)+O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)+O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)+$$

$$O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)=O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right).$$

თუ $|x|<\frac{1}{M_j}$, $|y|>\frac{1}{N_k}$

$$O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+$$

$$+O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)+$$

$$O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)=O(1)\omega^*(x,y)+O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},y\right)+$$

$$+O(1)\omega^*\left(x,y+\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)=$$

$$=O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},y\right)+O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},y\right)+O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)+$$

$$+O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)=$$

$$=O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},y\right)=O(1)\,y^{\beta}N_k^{\beta}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right).$$

თუ $|x|>\frac{1}{M_j}$, $|y|<\frac{1}{N_k}$, გვექნება:

$$O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+$$

$$+O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)=$$

$$=O(1)\omega^*(x,y)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y\right)+O(1)\omega^*\left(x,y+\frac{\pi}{4n_k}\right)+$$

$$+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)=O(1)x^{\alpha}M_j^{\alpha}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right).$$

ამჯერად $|x|\geq\frac{1}{M_j}$,და $|y|\geq\frac{1}{N_k}$ შემთხვევაში გვექნება

$$O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y-\frac{\pi}{4n_k}\right)+$$

$$O(1)\omega^*\left(x-\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)=$$

$$O(1)\omega^*(x,y)+O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y\right)+O(1)\omega^*\left(x,y+\frac{\pi}{4n_k}\right)+$$

$$O(1)\omega^*\left(x+\frac{\pi}{4m_j},y+\frac{\pi}{4n_k}\right)=O(1)x^\alpha y^\beta M_j^\alpha N_k^\beta \omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right).$$

მაშასადამე,

$$|J_1|=\int\limits_{|x|\le\frac{1}{M_j}}\int\limits_{|y|\le\frac{1}{N_k}}\left(O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\right)^2\left(C'M_j\right)^2\left(C''N_k\right)^2dxdy=$$

$$\left(O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\right)^2\int\limits_{|x|\le\frac{1}{M_j}}\int\limits_{|y|\le\frac{1}{N_k}}\left(C'M_j\right)^2\left(C''N_k\right)^2dxdy=$$

$$=\left(O(1)\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\right)^2\left(C'M_j\right)^2\left(C''N_k\right)^2\frac{2}{M_j}\frac{2}{N_k}=O(1)\left(\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\right)^2M_jN_k$$

ამის გარდა

$$|J_2|=\int\limits_{|x|<\frac{1}{M_j}}\int\limits_{|y|>\frac{1}{N_k}}\left(O(1)y^\beta N_k^\beta\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)\right)^2\left(C'M_j\right)^2\left(\frac{D''}{y^2N_k}\right)^2dxdy=$$

$$=O(1)\left(C'M_j\right)^2\frac{2}{M_j}N_k^{2\beta}\frac{1}{N_k{}^2}\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)^2\int\limits_{|y|>\frac{1}{N_k}}y^{2\beta}\frac{1}{y^4}dy=$$

$$=O(1)M_jN_k^\beta\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)^2\int\limits_{|y|>\frac{1}{N_k}}y^{\beta-2}dy=$$

$$=O(1)M_jN_k\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)^2.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $|J_3|=|J_4|=O(1)M_jN_k\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)^2$. მაშასადამე (3.4)-დან

მივიღებთ:

$$\sum_{m_p=m_j}^{2m_j}\sum_{n_q=n_k}^{2n_k}\left|C_{m_p,n_q}\right|^2=O(1)M_jN_k\omega^*\left(\frac{1}{M_j},\frac{1}{N_k}\right)^2=O(1)F(m_j)F(n_k)\omega^*\left(\frac{1}{F(m_j)},\frac{1}{F(n_k)}\right)^2$$

თქვათ $m_p=2^j, n_q=2^k$, მაშინ, ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით გვექნება:

$$\sum_{p=m_j}^{2m_j}\sum_{q=n_k}^{2n_k}\left|C_{m_p,n_q}\right|^r=\sum{}^*\left|C_{m_p,n_q}\right|^r=O(1)\left(\sum{}^*\left(\left|C_{m_p,n_q}\right|\right)^2\right)^{r/2}\left(\sum{}^*1\right)^{1-r/2}=$$

$$=O(1)F(m_j)^{r/2}F(n_k)^{r/2}\left(\omega^*\left(\frac{1}{F(m_j)},\frac{1}{F(n_k)}\right)\right)^r\left(\sum{}^*1\right)^{1-r/2}=$$

$$=O(1)\left(2^j\right)^{1-r/2}\left(2^k\right)^{1-r/2}F\left(2^j\right)^{r-1}F\left(2^k\right)^{r-1}\left(\omega^*\left(\frac{1}{F(m_j)},\frac{1}{F(n_k)}\right)\right)^r.$$

ამ უკანასკნელში კოშის თეორემის გამოყენებით (მაგალითად იხილეთ [6]) მივიღებთ, რომ თეორემა დამტკიცებულია.

ლიტერატურა

1. Noble M.E., Coefficient properties of Fourier series with a gap condition, Math. Annalen 128(1954), pp. 117-120.

2. Tomic M., On the order of magnitude of Fourier coefficients with Hadamard gaps, J. London Math. Soc. 37(1962), pp. 117-120

3. Tomic M., On coefficients of Fourier series with Hadamard gap, Bull. Acad. Serbe Sei. Arts. El. Sei. Math. Natur. Sei. Math. Sei. Math. 35(1966). No. 5, pp. 63-68.

4. Patadia, J.R., On lacunary Fourier series, Jeurnal of the Indian Math. Soc. 42(1978) 245-251.

5. Zygmund, A., Trigonometric series, Vol. I (Cambridge University Press, 1959).

6. Челидзе В.Г., Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов, Издательство Тбилисского Университета, Тбилиси 1977, 24-25.

7. Бари Н.К., Тригонометрические ряды, Москва, изд. Физ.-мат.лит., 1963