ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ბექა ნიკოლაიშვილი

ზედაპირთა თანაკვეთა

კომპიუტერული მეცნიერებები

სამაგისტრო ნაშრომი შესრულებულია კომპიუტერული მეცნიერებების მაგისტრის

ხარისხის მოსაპოვებლად

ალექსანდრე გამყრელიძე-

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის

კომპიუტერული მეცნიერებების მიმართულების

სრული პროფესორი

გოდერძი ფრუიძე-

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის

მოწვეული ლექტორი,

კიბერნეტიკის ინსტიტუტის მათემატიკური კიბერნეტიკის განყოფილების

მეცნიერ თანამშრომელი

თბილისი, 2014

სარჩევი

ანოტაცია

თემაში ჩვენ განვიხილავთ ზედაპირების თანაკვეთას. აღწერილია და განხილული ხუთი ცნობილი მეთოდი: მესრული, მარშირების, ჰომოტოპიური, ზედაპირის რეკურსიული დაყოფის და ალგებრული .აღწერილია თითოეული მეთოდის ალგორითმი, მათი უპირატესობები და ნაკლოვანება. ხუთივე ალგორითმის შედარება წარმოდგენილია თემის ბოლოს დასკვნის სახით.

Abstract

The main aim of this paper is to discuss surface intersection methods. We have five main methods: Surface Lattice Evaluation Methods, Surface Marching Methods, Surface Homotopy Method, Surface Recursive Subdivision Methods, Surface Algebraic Methods. The advantages and disatvadagis of algorythms are given. Conclussion is given in the end of the thesis.

შესავალი

ზედაპირთა თანაკვეთა ერთ-ერთი ფუნდამენტალური საკითხია კომპიუტერული გრაფიკის დარგში. ზედაპირები და წირები შესაძლოა დაყოფილ იქნან ორ ძირითად ნაწილად: რაციონალურ-პარამეტრულ და არაცხადი სახით.

სხვა სახის გადაკვეთისგან განსხვავებით ზედაპირის ზედაპირთან თანაკვეთა ყველაზე რთული ამოცანაა გადასაჭრელად. სეგმენტები , მარყუჟები და მარტო მდგომი წერტილები - აი ეს კომპონენტები არის გადაკვეთისას მოსაძიებელი და თითოეულმა გადაკვეთის ალგორითმა უნდა დააკმაყოფილოს ამ მონაცემების მაღალი სიზუსტით გამოთვლა.

ზედაპირების გადაკვეთის პრობლემების ზოგადი კლასიფიკაცია

ეფექტურ ალგორითმებს აქვთ პრობლემა მარტო მდგომ წერტილებისა და ამავე წერტილების მიდამოს გამოთვლის დროს რადგან ელექტრონულ მანქანებს აქვთ სასრული სიზუსტით გამოთვლის უნარი. უფრო ზუსტი ალგორითმები შედარებით დიდ დროს მოითხოვენ. ხოლო ზოგიერთი ალგორითმი დაფუძნებულია ალგებრულ გეომეტრიაზე, რომელიც არ გამოდგება არაალგებრული ზედაპირებისათვის.

სახასიათო პრობლემა არის როდესაც ვცდილობთ გავიგოთ როდის არის მიახლოება კარგი . საჭიროა წინასწარ შემოღებული სიდიდეების კორექტულად განსაზღვრა, რათა ოპტიმალურ დროში მოხდეს სწორი შედეგის მიღება.

ასევე პრობლემატურია არის როდესაც ორი მკვეთი ზედაპირი არის თითქმის პარალელური. ამ დროს კარგი ალგორითმის შემუშავება ნამდვილი გამოწვევა არის. მარტივ მექანიზმებს , როგორიც არის ტრიანგულაცია და მესრული მეთოდი პრაქტიკულად ზუსტი გამოთვლების

ჩატარების შანსი არ აქვთ. სხვა უფრო რთულ ალგორითმებს, როგორიც არის ზედაპირების რეკურსიული დაყოფის ალგორითმი კი ძალიან დიდი დრო სჭირდებათ. მსგავსი სახის შემთხვევები სალმაოდ ხშირად გვხვდება.

პრობლემის მოგვარების მეთოდები იყოფა ხუთ ძირითად ნაწილად:
მესრული შეფასების მეთოდი, მარშირების მეთოდი, ჰომოტოპიური მეთოდი, რეკურსიული დაყოფის მეთოდი და ალგებრულ გეომეტრიაზე დაფუძნებული მეთოდი.

მიუხედავად იმისა რომ შეგვიძლია თითოეული დასმული ამოცანა გადავჭრათ რომელიმე კონკრეტული ალგორითმის გამოყენებითმ მუდამ უნდა გვახსოვდეს რომ მთლიანობაში ამოცანა შეიძლება რამდენიმე ეტაპისგან შედგებოდეს და მის ამოსახსნელად ერთი ან რამდენიმე მეთოდის გამოყენება გახდეს საჭირო. ხანდახან გამოიყენება ჰიბრიდული მიდგომაც, როდესაც ამოცანის ერთ ნაწილს(საწყისი წერტილების შერჩევა) ვითვლით ერთი ალგორითმით და მეორე ნაწილს(მიღებული შედეგების დახარისხება) მეორე ალგორითმით.

ზედაპირების თანაკვეთის მესრული მეთოდი

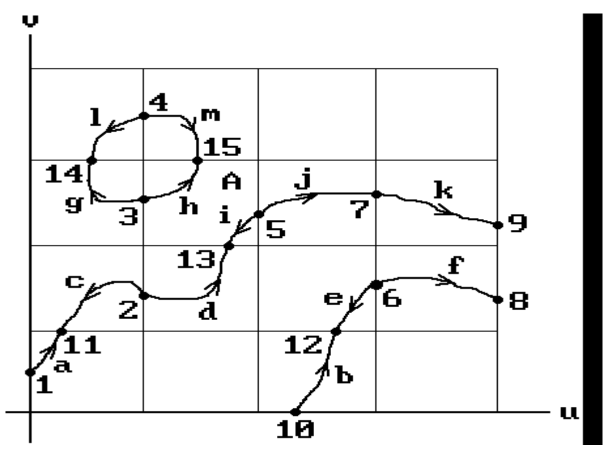
ძირითადად ეს ალგორითმი გამოიყენება იმისათვის რომ სხვა უფრო დახვეწილი ალგორითმისთვის შეაგროვოს მონაცემები. მოცემულია ორი პარამეტრული ზედაპირი p(u,v) და q(u,v), ერთი შეიცავს წირებისგან p(ui,v) და p(u,vj) შემდგარ მესერს , რომელის განსაზღვრის არეც არის მართკუთხა დომეინი p(u,v) და პოულობს მათ თანაკვეთას ზედაპირ q(u,v)-სთან. ძირითადად გადაკვეთა გვაძლევს ჩვენ საწყის მონაცემებს მარშირების მეთოდისთვის , რომელიც მერე გამოიყენება ორი ზედაპირის სრული გადაკვეთის აღსაწერად.   მსგავსი სახის ალგორითმები გამოიყენება როდესაც ადგილი აქვს მაგალითად სითბოს, ელექტრონული ტალღების ან ჰაერის ნაკადის გავრცელებას. აქაც ძირითადად ეს ალგორითმი მხოლოდ აღწერს ზედაპირებს და პირველი ეტაპია მონაცემების დამუშავების.

მარშირების მეთოდები

მარშირების მეთოდები,ანუ კვალის მიდევნების მეთოდები, არის ყველაზე ფართოდ გავრცელებული ალგორითმი ზედაპირთა თანაკვეთის შესასწავლად. მთავარი პრინციპი არის რომ ვპოულობთ წერტილების მიმდევრობას თანაკვეთაში და შემდეგ ამ წერტილებზე გადავაადგილდებით და ვაგებთ თანაკვეთის წირს. ძირითადად ამ სახის მიდგომას აქვს სამი ფაზა: ძიების ფაზა, კვალის მიდევნების ფაზა და დახარისხები ფაზა. პირველი ფაზის დროს ვცდილობთ ვიპოვოთ საწყისი წერტილები, რომლებსაც შემდეგ მეორე ფაზაში გამოვიყენებთ. საკმაო წერტილების რაოდენობა უნდა შევაგროვოთ საიმისოდ რომ კარგად იყოს თანკავეთა წარმოჩენილი. წერტილები შეირჩევა ვარაუდით. ბოლო ფაზის დროს ხდება იმ წერტილების მიმდევრობის გამოყოფა რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს ნაწილებს და ხვეულებს , რომლებიც არიან ქვეწირები მთლიანი თანამკვეთი წირისა. ალგორითმს ვამთავრებთ კვეთის წირის წერტილებთან დისკრეტული მიახლოებით.

თიმერის მარშირების ალგორითმი

პირველი მარშირების მეთოდი იყო თიმერის მეთოდი. დავუშვათ გვაქვს ორი სიბრტყე: **S**1 და **S**2 შესაბამისი პარამეტრული განტოლზებით მოცემული p(u,v) და q(u,v). თითოეული მართკუთხა დომეინზე განსაზღვრული. იმისათვის რომ ვიპოვოთ გადაკვეთა **X**, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ქვესიმრავლე დომეინისა p(u,v) რომელიც ამ სიმრავლეს პარამეტრიზაციას ახდენს. ნახაზზე 1.1 არის ერთერთი ასეთი შესაძლო **X**.



1.1

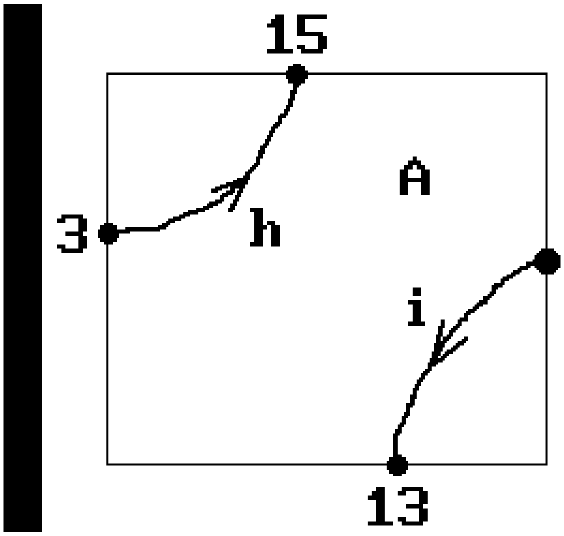
თიმერის ძიების ფაზა

დავყოთ მოცემული დომეინი მართკუთხედებად. მოცემული ხაზები $p(u_i,v)$ და $p(u,v_j)$განსაზღვრავენ წირებს ზედაპირ **S**1-ზე. ამ წირების თანაკვეთა ზედაპირ **S**2-თან მოგვცემს საწყის წერტილებს , რომლებიც არიან გამოყენებულები მიდევნების ფაზაში საძიებო **X**-ს მისაღებად. ჩვენ წინ დგას მასგავსი ალგორითებისთვის დამახასიათებელი პრობლემა: მივიღოთ საკმარისი წერტილების რაოდენობა საიმისოდ რომ არ გამოგვრჩეს **X** თანაკვეთის რაიმე ნაწილი. ნახაზზე 1.1 თანამკვეთი ოთხკუთხედები გადანომრილია 1-დან 15-ის ჩათვლით. uv_i იყოს შერჩეული პარამეტრი რომელიც გადანომრილია i-ს საშუალებით. გადანომრვა ხდება შემდეგი წესის მიხედვით: თავიდან ჩვენ ვმოძრაობთ ჰორიზონტალური მიმართულებით მარცხნიდან მარჯვნივ და ვალაგებთ მათ თანაკვეთას v სიდიდის ზრდის მიხედვით. შემდეგ გადავდივართ ვერტიკალურად განლაგებულ ოთხკუთხედებზე რომლებიც დალაგებულია ქვემოდან ზემოთ და ვაგებთ გადაკვეთას u მაჩვენებელის ზრდის მიხედვით. აუცილებელი არ არის გადაკვეთის წერტილების ზუსტად გამოთვლა. ისინი უბრალოდ საკმარისად ზუსტად მოცემული, რომ შემდგომში ნიუტონ-რაფსონის მეთოდმა მოახერხოს მათი ნამდვილ მნიშვნელობებთან მიახლოება. ამიტომ საწყისი წერტილები შეიძლება ვიპოვოთ დისკრეტული წირები p(ui,v) და p(u,vj).

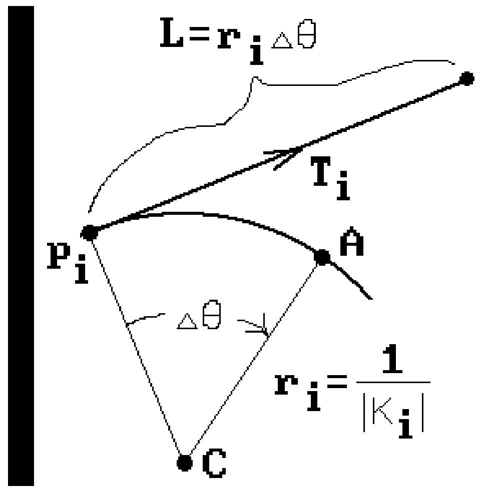
თიმერის კვალის მიდევნების ფაზა

ჩვენ განვიხილავთ ყოველი ქვეწირის კვეთას ცალ-ცალკე. სურათი 1.11 თვალნათლივ გვიჩვენებს მსგავს დახარისხებას. რადგან წერტილები (u,v_i) შეესაბამება თითოეული მონაკვეთის ბოლო წერტილებს , ამიტომ ჩვენ მათ სათითაოდ შევაერთებთ და სწორად ვიმოძრავებთ ქვეწირების გასწვრივ. ეს არამარტო სწორად დაგვალაგებინებს წირის ნაწილებს

არამედ მოგვცემს მიმართულებასაც. თვალსაჩინოებისთვის სურათი 1.1 გვიჩვენებს ნომრებს a,b . . . . .k და მიმართულებასაც



სურათი 1.11



სურათი 1.12

თუ როგორ არის წირის სეგმენტები ერთმანეთთან დაკავშირებული. ეს მხლოდ საწყისი წერტილებია, ნამდვილი მიდევნება წირზე ხდება ნიუტონ-რაფსონის მეთოდის გამოყენებით.

თავდაპირველად ნაბიჯისთვის ვიყენებთ წირის მხებ ვექტორს. მისი მიღება ხდება ზედაპირზე დაშვებული ნორმალებისგან. გამომდინარე იქიდან რომ ზედაპირები გადაკვეთის წერტილებში ერთმანეთს არ ეხებიან.

აქედან გამომდინარე, თუ $\mathbf{x} = p(u_1,v_1) = q(u_2,v_2)$ არის გადაკვეთის წერტილი **X**, მაშინ

$$(p_u(u_1,v_1) \text{ x } p_v(u_1,v_1)) \text{ x } (q_u(u_2,v_2) \text{ x } q_v(u_2,v_2))$$

არის მხები ვექტორი **X** წირისა **x** წერტილში. შევნიშნოთ რომ ჩვენ ყველა ჩვენს გამოთვლებს ვუსადაგებთ p(u,v) ზედაპირს და შესაამისად გვაქვს პარამეტრი (u_1,v_1) მაგრამ არა (u_2,v_2). იმისათვის რომ მივიღოთ პარამეტრი (u_2,v_2), სხვა იტერაციული პროცედურა არის

გამოყენებული მოცემული x წერტილისათვის, რომელიც (u,v)- სთვის შემდეგი სახის ტოლობას ხსნის:

$$\mathbf{x} - q(u,v) = 0.$$

შემდეგი არის ნაბიჯის სიგრძის განსაზღვრა. შევხედოთ სურათს 1.12 დავუშვათ ვართ წერტილ $\mathbf{p}_i$-სთან. $\mathbf{T}_i$ იყოს ერთეულოვანი მხები ვექტორი წერტილ $\mathbf{p}_i$-ში. k_i იყოს p_i-ში სიმრუდე. ეს სიდიდე შეიძლება გამოთვლილ იქნას წირის საწყისი და ბოლო წერტილებით p(u,v) და q(u,v). r_i იყოს მრუდის რადიუსი.

მაშინ L იქნება განსაზღვრული $r_i \Delta\varnothing$ თაღისა $\mathbf{p}_i$-დან **A**-მდე გარშემოწერილი წირისა ცენტრით C-ში. სადაც $\Delta\varnothing$ არის რაიმე წინასწარ განსაზღვრული კუთხის სიდიდე . უნდა აღინიშნოს რომ ზუსტად წირის გამოთვლა საჭირო არ არის რადგან ჩვენ მხოლოდ რადიუსი გვაინტერესებს. მაშინ წერტილი $\mathbf{B} = \mathbf{p}_i + L\mathbf{T}_i$ ინქება საწყისი მონაცემი ნიუტონ რაპსონის მეთოდისთვის რომ ვიპოვოთ შემდეგი წერტილი $\mathbf{p}_{i+1}$.

თიმერის დალაგების ფაზა

უნდა ავიღოთ ჩვენი წირის სეგმენტები და დავაკვშიროთ შესაბამისად რომ მივიღოთ ჩვენი თანაკვეთის მთლიანი წირი. წირის მხოლოდ ბოლო წერტილები არის მნიშვნელოვანი. ჩვეულებრივ ვიწყებთ წერტილ uv_1 და იმ ნაწილით რომელსაც ის ეკუთვნის , შემდეგ ვეძებთ ნაწილს რომელსაც აქვს ამ ბლოს შესაბამისი ბოლო წერტილი. და ასე ვაგრძელებთ. მაგალთად 1.1 სთვის შემდეგი სხე გვექნება:

a, -c, d, -i, j, k

b, -e, f

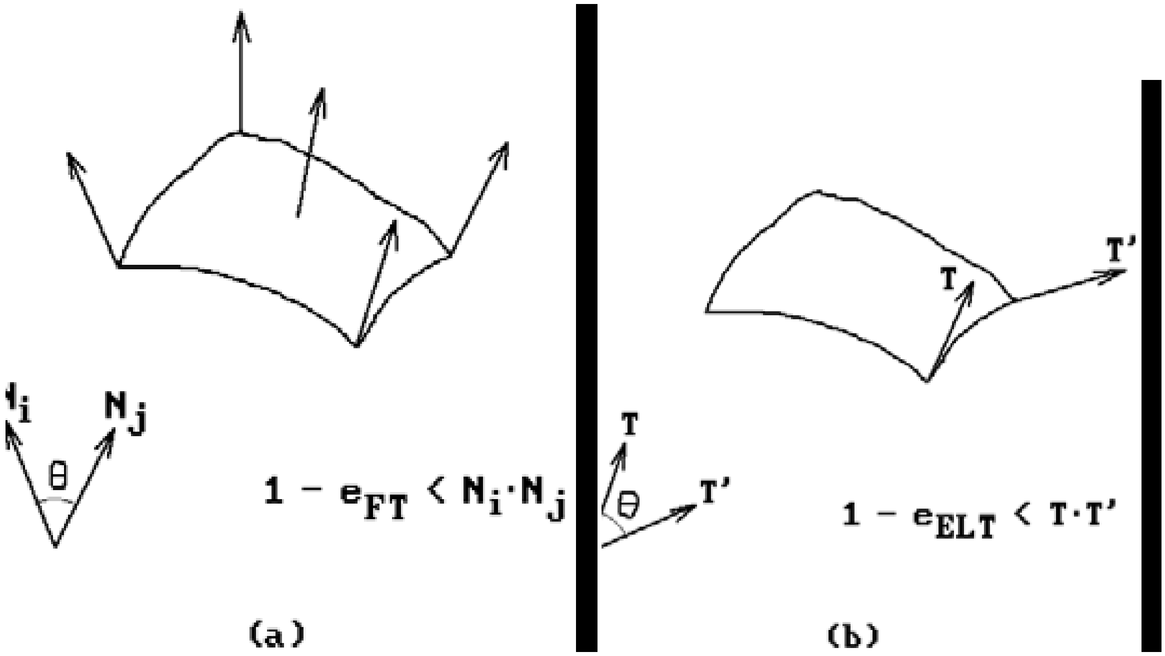
h, -m, l, -g

მთავარი პრობლემა თიმერის ალგორითმში ხშირად მიღებული არასწორი პასუხი არის. მიუხედავად იმიისა რომ სხვა ალგორითმებიც უშვებენ შეცდომებს, ხშირ შემთხვევებში ისინი უფრო მეტ სწორ პასუხს იძლევიან.

ბარნჰილ-კერსეის ძიების ფაზა

პირველი ნაბიჯი არის თითოეული ოთხკუთხა ან სამკუთხა დომეინის დაყოფა ადაპტაციური გზით. კავადრანტების ხის სტრუქტურა არის გამოყენებული ქვესიმრავლის შესანახად. შესაძლებელია რამდენიმე ქვესიმრავლის გამოყენება. ასევე დაყოფის რამდენიმე მეთოდი შეიძლება იყოს გამოყენებული.
დაყოფის შედეგად მიღებულ ოთკუთხედებში შესაძლებელია არ იყოს დაცული ზედაპირის სიბრტყე და კუთხების სწორხაზოვნება. ამის დადგენა შესაძლებელია ნორმალისა და მხებს შორის არსებული კუთხის მიხედვით.
ყოველი ასეთი ოთხკუთხედისთვის ჩვენ გვინდა რომ წვეროებსა და შიდა წერტილის ნორმალები იყოს თითქმის პარალელური. შესაბამისად კუთხე მათ შორის უნდა იყოს მცირე. (იხ. ფიგურა 1.2(ა)). ამასთანავე ყოველი ქვედანაყოფის კუთხეებისთვის, თუ **T** და **T**' არის ერთეულოვანი მხები ვექტორები კუთხის წერტილებში , მაშინ ჩვენ გვსურს რომ ეს ვექტორებიც იყვნენ თითქმის პარალელურნი ან კუთხე მათ შორის იყოს ძალზე მცირე. (იხ. ფიგურა 1.2(ბ)). e_{FT} და e_{ELT} პარამეტრები ფიგურაში წარმოადგენენ რაიმე წინასწარ

განსაზღვრულ სიბრტყეს და კუთხეების სისწორეს შებამისად.



ნახატი 1.2

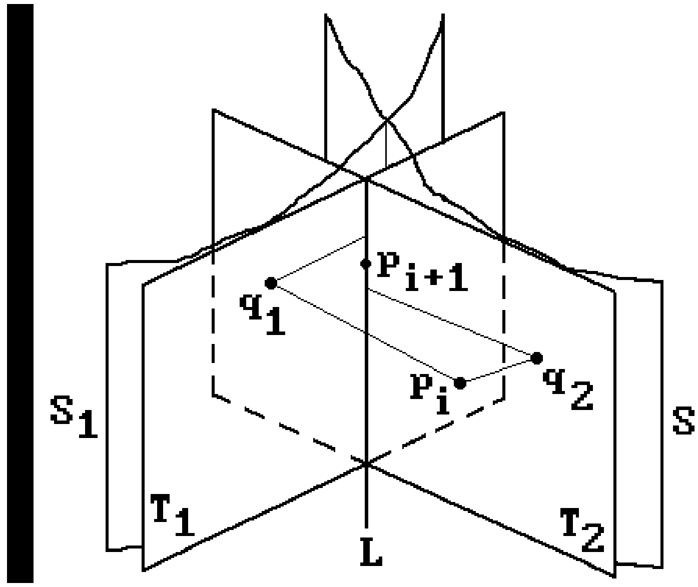
ამ ეტაპზე პარალელოპიპედური ყუთი არის თითოეული ქვედანაყოფის შესაბამისი. აუცილებელია რომ თითოეულმა ასეთი ყუთი შეიცავდეს ქვედანაყოფს. ყუთის მოხაზულობის საწყისი მონაცემები არის წვეროები ოთხკუთხედის და შემდეგში დამატებითი მონაცემების სახით შეიცავს ინფორმაციას კუთხის მხებისა და ნოორმალის შესახებ. შემოსაზღვრული ყუთების დანიშნულება რის ისეთი სეგმენტების გამორიცხვა, რომლებიც ორის სიბრტყეების თანაკვეთისას დიდი ალბათობით არ გადაიკვეთება. იმ განსაზღვრებით, რომ ორი პარალელოპიპედის თანაკვეთა დასრულებულია როდესაც ერთ პარალელოპიპედს გარდავქმნით ირიბ კოორდინათების სიტემად, რომელიც განსაზღვრულია პირველის მიერ. პრობლემა დაიყვანება იმაზე პარალელოპიპედი კვეთს ერთეულოვან კუბს თუ არა და ამას აქვს პირდაპირი გადაჭრის მეთოდი. როდესაც ვიპოვით პოტენციური თანაკვეთის ველებს, შესაძლებელია იყოს უფრო მეტი ქვედივიზიონები იმისათვის რომ გავზარდოთ გარდასახვა ნიუტონ-რაპჰსონის მეთოდისთვის. წარმოვიდგინოთ რომ გვაქვს ორი შემოსაზღვრული ყუთი რომლებიც კვეთენ ერთმანეთს. ვიღებთ ნებისმიერი კუთხის წვეროს და და ვამატებთ გადაკვეთაში. ეს ჩვენ მოგვცემს საწყის წერტილებს თანაკვეთისა, რომლებიც შემდგომში გამოყენებული იქნება კვალის მიდევნების ფაზაში.

წერტილების შერჩევის ფაზა

$\mathbf{p}$ იყოს ის საწყისი წერტილი რომელის საშუალებითაც უნდა ვიპოვოთ თანაკვეთის სხვა წერტილები. ზედაპირთა თანაკვეთის დროს მიღებულ წირში $\mathbf{q}$ იქნება წერტილი რომელთანაც $\mathbf{p}$ არის დაკავშირებული. წერტილი $\mathbf{q}$ არის სასრული მიმდევრობა $\mathbf{p}_i$ წერტილების ზღვარი სადაც $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}$. დავუშვათ , რომ ჩვენ უკვე ვიპოვეთ $\mathbf{p}_i$. ჩვენ აღვწერთ თუ როგორ უნდა მივიღოთ წერტილი $\mathbf{p}_{i+1}$. თავდაპირველად უნდა ვიპოვოთ $\mathbf{q}_1$ სიბრტყე $\mathbf{S}_1$-ში და $\mathbf{q}_2$ წერტილი სიბრტყე $\mathbf{S}_2$-ში, რომლებიც $\mathbf{p}_i$-თან ყველაზე ახლოს არიან. თუ აღმოჩნდება რომ წერტილები $\mathbf{q}_1$ და $\mathbf{q}_2$ არიან წინასარ განსაზღვრული რაიმე მიდამო e_{SPT}-ს სიახლოვეს $\mathbf{p}_i$ წერტილიდან , მაშინ ჩვენ უკვე ვიპოვეთ ჩვენი $\mathbf{q}$ და ძებნას ვწყვეტთ.

წინააღმდეგ შემთხვევაში შემოგვაქვს შემდეგი სიდიდეები: $\mathbf{T}_j$ იყოს მხები სიბრტყე $\mathbf{S}_j$-სა $\mathbf{q}_j$-წერტილში. მაშინ $\mathbf{p}_{i+1}$ იქნება $\mathbf{q}_1$ და $\mathbf{q}_2$ წერტილების გემილების შუაწერტილი იმ ღერძზე რომელიც წარმოადგენს $\mathbf{T}_1$ და $\mathbf{T}_2$ სიბრტყეების თანაკვეთას. ასევე $\mathbf{n}_j$ იყოს $\mathbf{T}_j$ სიბრტყის ერთეულოვანი ნორმალი ვექტორი და აქვე განვსაზღვროთ მესამე არაპარალელური სიბრტყე $\mathbf{T}_3$ როგორც $(1/2)(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$ წერტილზე გამავალი სიბრტყე და ნორმალი $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. მაშინ $\mathbf{p}_{i+1}$ არის სამი სიბრტყის $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, და$\mathbf{T}_3$ თანაკვეთა. კერძო

შემთხვევა როდესაც **T**1 და **T**2 პარალელურია არის იოლად ამოხსნადი ცალკე შემთხვევა.



სურათი 1.3

წერტილთან მიახლოება,რომელიც თეორიულად პრობლემას წარმოადგენს, სინამდვილეში არ არის პრობლემატური თუ ყველა წერტილი არის წინასწარ განსაზღვრულ e_{SPT} მიდამოში იქნება თავმოყრილი.

მეთოდი რომელიც ჩვენ გამოვიყენეთ წერტილებთან მისაახლოებლად არის გამოყენებადი თანაკვეთის შიდა წერტილების აღსაწერად, მაგრამ არა იმ წერტილების საპოვნელად რომლებიც არიან კვეთის საზღვარზე. მსგავსი წერტილებისთვის გამოიყენება ნიუტონ-რაფსონის მეთოდი, რათა ვიპოვოთ ამონახსენი შემდეგი განტოლებისთვის:

$$p(u, v) - q(s, t) = \mathbf{0}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ ერთ-ერთი ცვლადი არის იმ ზღვრით შეზღუდული რომელსაც უკავშირდება, მაგალითად $u = 0$. ჩვენ გვაქვს სამი განტოლება სამი უცნობით. პ.ს კვლავ პრობლემად რჩება შემთხვევა, როდესაც მხები სიბრტყეები პარალელურია.

ბარნჰილ-კერსეის კვალის მიდევნების ფაზა

ეს ფაზა იწყება ყველა თანამკვეთი წერტილისათვის რომელიც წერტილების დატანის ფაზის დროს იქნა შერჩეული. ყოველი ასეთი წერტილისათვის ამ ფაზაში გენერირდება წერტილების მიმდევრობა რომელიც განლაგებულია თანაკვეთაში. როდესაც გადავაადგილდებით ერთი წერტილ **p**-დან მეორე წერტილიში გვჭირდება მიმართულება და

ნაბიჯის სიგრძე. გადამკვეთი წირის მხები მოცემულ წერტილში არის მიმართულების განმსაზღვრელი , ისევე როგორც თიმერის ალგორითმში. მხები გამოითვლება სიბრტყე **p**-ს ნორმალი ვექტორების საშუალებით. შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი მიმართულება:

$$(p_u \times p_v) \times \mathbf{n}_2 = (p_u \cdot \mathbf{n}_2) p_v - (p_v \cdot \mathbf{n}_2) p_u$$

სამწუხაროდ ეს ფორმულა იძლევა ნულს იმ შემთხვევაში თუ სიბრტყეები არიან მხებები. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია წინა გადამკვეთი წერტილებს შორის სხვაობის აღება. თუ წინა წერტილები არ არსებობს და ჩვენ ვართ საწყის წერტილ $\mathbf{p} = p(u_0, v_0) = q(s_0, t_0)$, მაშინ ვხაზავთ წრეს (u_0, v_0) და (s_0, t_0) წერტილების გარშემო პარამეტრიზაციის დომეინიდან და უკვე ამ წრიდან ვიღებთ თანაკვეთის სხვა წერტილს. ნაბიჯის მიმართულება უკვე იქნება სხვაობა ახლად შერჩეულ წერტილსა და წერტილ **p**-ს შორის.

როდესაც გვაქვს ნაბიჯის მიმართულება უნდა განვსაზღვროთ ნაბიჯის სიგრძეც. ვიყენებთ ფორმულას: $L = r\Delta\emptyset$, სადაც r არის სიმრუდის რადიუსი და $\Delta\emptyset$ არის წინასწარ განსაზღვრული **კუთხის გრადუსი**. მაგრამ აქ იგულისხმება რომ პრამეტრიზაცია არის C1 და შესაბამისად მეორე რიგის წარმოებულებს არ შეუძლიათ პირდაპირ გამოთვალონ რადიუსი. ამიტომ მიახლოება არის გამოყენებული.

ჩავთვალოთ რომ ჩვენ ვართ გადაკვეთის ერთ-ერთ წერტილ **p**-ზე. ორი წერტილი რომელებიც წერტილ **p-დან** არიან რაღაც e დისტანციაზე არიან დაკავშირებული კვეთაზე მდებარე წერტილებთან X და Y-თან.

სამი წერტილი **p**, **x**, და **y** განსაზღვრავენ წრეს და ჩვენ ვუშვებთ რომ r იყოს მისი რადიუსი. რადგან ჩვენ ვუშვებთ , რომ ეს წრე არის მიახლოება მხების წრეწირთან. ვიყენებთ ფორმულას:

$$r = \frac{|a||b||a-b|}{2|a \times b|},$$

სადაც $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$ და $\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{p}$. თუ სამი წერტილი ერთ წრფეზე მდებარეობს ან L აღმოჩნდება იმაზე დიდი ვიდრე e_{CRT}, მაშინ L აღებულ იქნება e_{CRT}.

წერტილ $\mathbf{p}$-ზე მოცემული ერთეულოვანი ვექტორი $\mathbf{v}$-ს დახმარებით ჩვენ გადავდივართ შემდეგ წერტილ $\mathbf{p} + L\mathbf{v}$-ზე და ვათავსებთ მას გადკვეთაში. ეს აღწერს ჩვეულებრივ კვალის მიდევნების ნაბიჯს, მაგრამ არის კიდევ ერთი გართულება, რასც იწვევს ეგრეთ წოდებული ბოლოში მდგომი წერტილები. ეს ის წერტილებია სადაც გადაკვეთის წერტილები

(1) ხვდება საწყის წერტილს იმავე წირის სეგმენტზე და წირი დახურული გამოდის.

(2) ხვდება ზღვარს.

(3) უფრო ადრინდელ წირის სეგმენტს.

პირველი საკმაოდ მარტივი არის , ხოლო მეორე შემთვევა ჩვენ განვიხილეთ როდესაც აღვწერეთ წერტილების შეგროვების პროცესი.

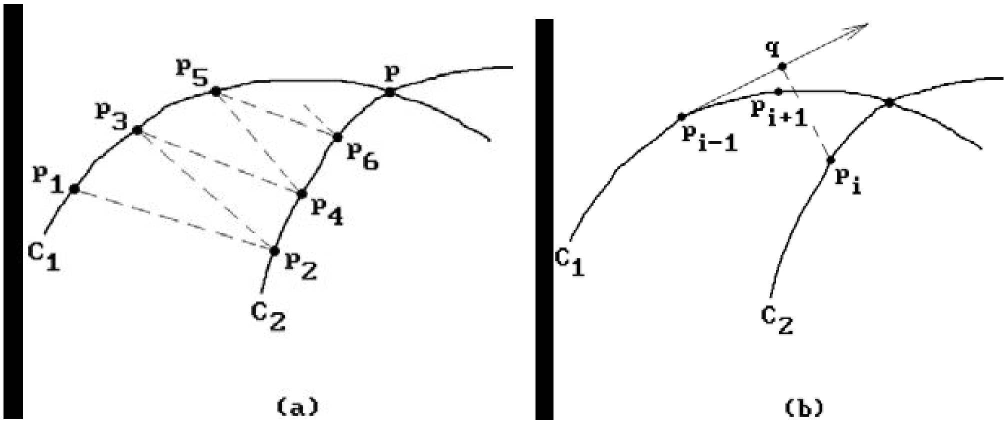
(3) შემთხვევის წერტილების აღმოსაჩენად საჭიროა მთლიანი წირის შემოწმება.

ასეთი წერტილები არიან ფოთოლი წერტილები და მდებარეობენ იქ , სადაც ბევრი გადამკვეთი წირი ერთად გადაიკვეთება.

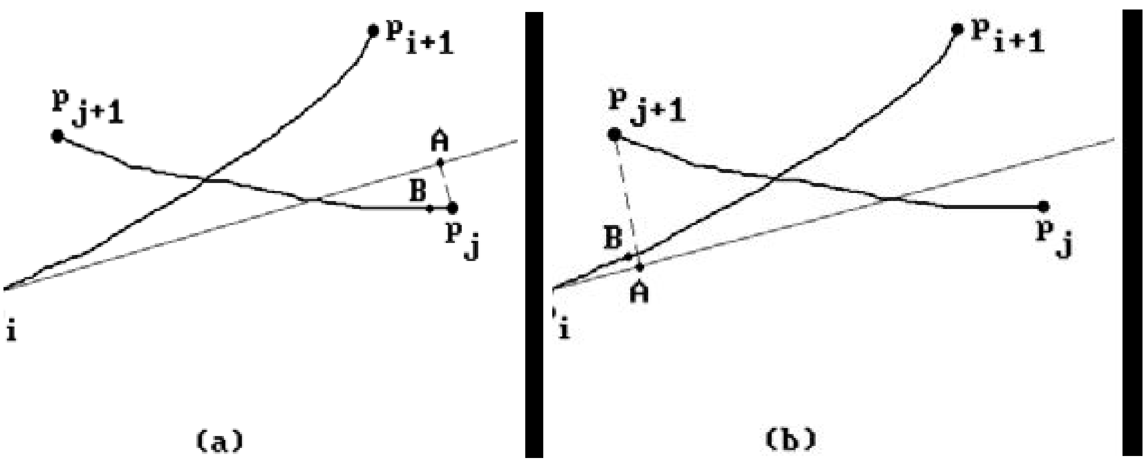
ასეთი წერტილი $\mathbf{p}$-ს საპოვნელად: ვიღებთ ორ ბოლო წერტილს $\mathbf{p}1$ და $\mathbf{p}2$ თანამკვეთი წირებიდან $\mathbf{C}1$ და $\mathbf{C}2$, შესაბამისად, როგორც საწყის წერტილებსდა შემდგომში ვსაზღვრავთ წერტილების მიმდევრობა $\mathbf{p}i$-ს. წერტილები $\mathbf{p}i$ უნდა იყვნენ წირბიდან მორიგეობით აღებულნი(იხ. სურათი 1.3 (ა)).

ვაგრძელებთ $\mathbf{p}i$ წერტილების დაგენერირებას, მანამ სანამ ორი წერტილი არ აღმოჩნდებიან e_{SPT} მიდამოთი ერთმანეთისგან დაშორებულნი. თუ არ არის მიახლოება მაშინ ჩვენ არ გვაქვს ფოთოლი წერტილი. ვნახოთ როგორ არის $\mathbf{p}i+1$ განამრტებული: ვგულისხმობთ, რომ $\mathbf{p}i-1$ და $\mathbf{p}i$ უკვე ნაპოვნი გვაქვს.

(იხ. ფიგურა(ბ)). $\mathbf{q}$ იყოს $\mathbf{p}i$-ს მართობული გეგმილი გადამკვეთი წირი მხებზე $\mathbf{p}i-1$ წერტილში. თუ $\mathbf{n}_i$ არის ნორმალი ვექტორი $\mathbf{S}i$ ზედაპირის $\mathbf{p}i-1$ წერტილში, მაშინ



სურათი 1.3



სურათი 1.4

წერტილი **q** არის დაკავშირებული გადამკვეთ წერტილთან რომელიც არის განმარტებული როგორც $\mathbf{p}_{i+1}$. უამრავი პრობლემა შეიქმნება, თუ ორი წირული სეგმენტის მხებები ფოთოლ წერტილში არიან თითქმის პრალელურები. შემდეგი პრობლემა მოცემულის ფიგურა სურათზე 1.4. დავუშვათ ჩვენ აღმოვაჩინეთ გადაკვეთა პარამეტრულ სეგმენტებში, რომელთა ბოლოო წერტილები მოცემულია წყვილი წერტილებით: $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_{i+1}$ და $\mathbf{p}_j$, $\mathbf{p}_{j+1}$. სურათი 1.4(ა) თუ ავირჩევთ $\mathbf{p}_i$ და $\mathbf{p}_j$ წერტილებს კვეთის საწყის წერტილებად, მაშინ $\mathbf{p}_j$ გეგმარდება წერტილ **A**-ზე რომელიც მდებარეობს $\mathbf{p}_i$-წერტილზე გამავალ მხებზე და შესაბამისად წერტილი **A** უკავშირდება წერტილ **B**-ს რომელიც არის ასევე მდებარეობს

იმავე წირზე, რომელზეც **A**.   ეს ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას რომ ჩვენი მიმდევრობის წერტილები უნდა იყოს მიმდევრობით განლაგებული სხვადასხვა წირის სეგმენტებზე. დავუშვათ ჩვენ დავიწყეთ წერტილებით $\mathbf{p}_i$ და $\mathbf{p}_{j+1}$,   როგორც ეს არის მოცემული სურათ 1.4(ბ)-ზე,   მაშინ ყველაფერი კარგად იქნებოდა.

მსგავსი შემთხვევები თავიდან ასაცილებლად ამის თავიდან საცილებლად ალგორითმი გვთავაზობს კუთხის გაზომვას წერტილებს $\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1}$ და $\mathbf{p}_j\mathbf{p}_{j+1}$ შორის. თუ კუთხე 90 გრადისზე ნაკლებია, ანუ სურლდება პირობა:

$$\mathbf{p}_i\mathbf{p}_{i+1} \cdot \mathbf{p}_j\mathbf{p}_{j+1} > 0,$$

მაშინ უნდა ავირჩიოთ $\mathbf{p}_i$ და $\mathbf{p}_j$,   სხვა შემთხვევაში $\mathbf{p}_i$ და $\mathbf{p}_{j+1}$.

უამრავი პრობლემა არის როდესაც კუთხე არის 0-თან ან 90-თან ახლოს.

ალგორითმი იყენებს სხვადასვა მეთოდს ბოლო წერტილების საპოვნელად. ის იყენებს ალგებრულ მეთოდს ძიების ფაზისთვის და პოულობს საბოლოო წერტილებს მანამ სანამ კვალის მიდევნებას ეტაპს დაიწყებს.

წინასწარ განსაზღვრული სიდიდეები

რამდენიმე წინასწარ განსაზღვრული სიდიდე არის გამოყენებული ამ ალგორითმში. უმთავრესი მათგანი არის წერტილის მიდამო e_{SPT}. მაგალითად 32 ბიტიანი მანქანური სიტყვის მქონე კომპიუტერებში $e_{SPT} = 10^7$ იძლევა საკმაოდ კარგ შედეგს. ასევე რეკომენდირებულია გამოვიყენოთ კუთხის გრადუსთან დაკავშირებული სიდიდეები , იმ მიზნით რომ   არ ვიყოთ სედაპირის სიდეებზე და ზომის ერთეულებზე დამოკიდებულნი.

ბარნჰილ-კერსეის ალგორითმის მონაცემთა შენახვის სტრუქტურა

მთავარი გამოყენებადი სტრუქტურა არის კვადრანტების ხე. ხის თითოეული კვანძი შეიცავს შემდეგი სახის ინფორმაციას: დონეს, შესაბამისი მოსაზღვრე ყუთის კოორდინატის ტრანსფორმაციას და მის შებრნებულს,   კუთხის სიწრორის და სიბრტყის სიდიდეებს, პარამეტრების დომეინს, მნიშვნელობებს, ნორმალებს, მიმთითებელს სორტირების ცხრილზე, მიმთითებელს შვილობილ კვანძზე.

მოსაზღვრე ყუთების სიის კვანძი შეიცავს შემდეგ ინფორმაციას: მიმთითებლებს კვანძებზე რომლებიც შეიცავენ დომეინის სეგმენტის საწყის და ბოლო წერტილებს წარმოდგენილს ნამდვილი რიცხვების სახით: u_1, v_1, u_2, და v_2. სეგემნტის საწყის და ბოლო წერტილს სივრცეში და აღმნიშვნელს იმისა სეგმენტის დამუშავება დასრულებულია თუ არა.

ბარნჰილ-კერსეის დალაგების ფაზა

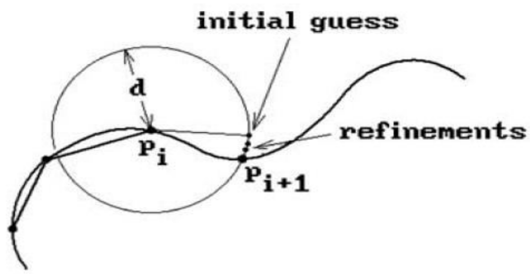
კვადრანტების ხის სტრუქტურა, რომლებშიც მონაცემები ინახება, აიოლებს სორტირების ფაზას, მაგრამ მისი გამოყენება აუცილებელი არ არის. შევნიშნოთ რომ ყველა შორეული პოლიგონალური წირი , რომელიც კვალის მიდევნების ფაზის დროს მივიღეთ, მთავრდება ზღვრულ ან ფოთლის წერტილში. სორტირების ფრაზის დროს ბოლო წერტილები მიიჩნევა ერთნაირად თუ ისინი ერთმანეთისგან დაშორებულნი არიან e_{SPT} მანძილით.

ამ ალგორითმის დიდი პლიუსი იყო ის რომ მან იმუშავა როდესაც პარამეტრიოაზცია მოცემული იყო სამკუთხედების დომეინით , არ იყო საჭირო მეორე რიგის წარმოებულების გამოყენება, რაც თავისთავად დიდ გამოთვლებთან იყო დაკავშირებული და შესაბამისად უფრო რთულ შემთხვევებს კორექტულად ხსნიდა. სხვადასხვა რთული შემთხვევების უკეთ გამოსაკვლევად შესაძლებელი არის მიახლოებების ხელოვნურად შემოღება. თუ ვიგულისხმებთ რომ გდამკვეთი წირი არის uv–სიბრტყეში, რომელიც განამრტებულია $f(u, v) = 0$ ფორმულით და ჩვენ უკვე გამოვთვალეთ მნიშვნელობა წერტილისთვის $\mathbf{p}_i = (u_i, v_i)$. შესაძლებელია სხვადასხვა მხრიდან ამ პრობლემის განხილვა.მაგალითად შეგვიძლია მანიჯის ზღვარი დავაწესოთ. შემოვიღოთ შემდეგი ზედაპირი :

$g(u, v) = 0$. მაგალითად

$$g(u,v) = (u - u_i)^2 + (v - v_i)^2 - d^2$$

ტოლობა შეესაბამება მოთხოვნას რომ წერტილი $\mathbf{p}_{i+1}$ იყოს დაშორებული d მანძილით $\mathbf{p}_i$ წერტილიდან. ნაბიჯი მხები ვექტორის მიმართულებით, რომელიც გადის (u_i, v_i) არის საწყისი მონაცემი ნიუტონ-რაფსონის მეთოდისთვის. შევხედოთ სურათს 13.17. სურათზე აღნიშნულია სახასიათო პრობლემა - საწყისი წერტილის პოვნის პრობლემა.



ნაბიჯის შემომსაზღვრელი უნდა იყოს ფრთხილად შერჩეული. მაგალთად 13.15 ტოლობისთვის ნაბიჯის სიგრძე d წერტილიდან-წერტილამდე შესაძლოა იცვლებოდეს. ასევე უნდა გავითვალისწინოთ შესაძლებლობა , რომ ჩვენ შეიძლება გავცდეთ მოცემულ დომეინს. თუ გადამკვეთი წირი არის დახურული, მაშინ ჩვენ უნდა შეგვეძლოს მიახლოებითი წირის დასრულებაც.

მეოთხე მიდგომა არის თვითონ ფუნქციის მინიმიზაცია. მაგალითად თუ გადაკვეთა განამრტებულია:

$$f(x,y,z)=0$$
$$g(x,y,z)=0$$

და ჩვენ ვიყენებთ ნაბიჯის შეზღუდვას, განმარტებულს შემდეგი სახით:

$$H(x,y,z)=0$$

მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვცადოთ შემდეგი სახის მინიმიზაცია:

$$F=f^2+g^2+h^2.$$

ტიპიური მარჩინგ მეთოდის მთვარი მექანიზმი არის ნიუტონ-რაფსონის მეთოდი. ყოველი მსგავსი სახის ალგორითმი მთვარდება შედეგთან სასრული მიახლოებით. როდესაც დავაგენერირებთ საწყის წერტილებს, ყოველთვის ვარაუდოთ გადავდივართ შემდეგ წერტილებზე და მხოლოდ ამის შემდეგ ვიყენებთ ნიუტონ-რაფსონის მეთოდს. იტერაციების სასრულად მეორდება მანამ სანამ არ მივიღებთ სასურველ შედეგს. ჩამოვთვალოთ რამდენიმე ძირითადი პრობლემა:

1. მათ სჭირდებათ საწყისი წერტილები. ისინი უნდა შეირჩეს.
2. გადაადგილების მიმართულება და ნაბიჯის სიგრძე უნდა იყოს ძალიან ფრთხილად შერჩეული იმისათვის რომ არ იქნეს გამოტოვებული არც ერთი ნაწილი თანამკვეთი წირისა.

3. ბოლო წერტილების სიახლოვეს დიდი რაოდენობით გამოთვლები არის ჩასატარებელი.
4. განცალკევებით მდგომ წერტილებთან მათ პრობლემები აქვთ.

განმასხვავებელი ნიშანი სხვადასხვა მარშირების ალგორითმებისა არის განსხვავებული მიდგომა ამოცანისადმი. გააჩნია რა სახის ამოცანა არის გადასაჭრელი ჩვენს წინაშე. განვიხილოთ ზემოთ ჩამოთვლილი პუნქტები სათითაოდ.

საწყისი წერტილების შერჩევა შეიძლება შემთხვევითობის პრინციპით და მესრული მეთოდის გამოყენებით.
ნაბიჯის სიგრძისა და მიმართულების სწორად შემოღება არის საკვანძო მომენტი მიახლოების პოვნისთვის. უმეტეს შემთხვევებში ამ სიდიდეების შემოღება ხდება იმაზე გაანგარიშებით რომ გამოიყენება წრფივი მიახლოება. მაგალითად შემდეგი წერტილების შერჩევა ხდება მხებზე მდებარე წერტილებიდან. სამწუხაროდ ხშირად ეს საკმაოდ უხეში შერჩევა არის. უფრო მაღალი რიგის მიახლოების შემთხვევაში ნიუტონის მეთოდი უფრო სწრაფად იმუშავებს. ასევე გვქენება წარმოებულების გამოყენების საშუალებაც.
მაგრამ მაღალი რიგის მიახლოებისას საჭიროა რესურსი და გამოთვლებს მიაქვს დიდი დრო. ამიტომაც უმრავლეს ალგორითმებში მსგვასი სახის გამოთვლების ჩატარებაზე ამბობენ უარს. რაც შეეხება ნაბიჯის სიგრძეს: ინტუიციურად ჭკვიანური არის ზღვრად წერტილის გარშემო არსებული წრის რადიუსის აღება. ორივე, თიმერის და ბარნჰილ-კერსეის ალგორითმი ნაბიჯის მიმართულებად იღებს მხებს და ნაბიჯის სიგრძედ იღებს სწორედ ამ გარშემომწერი წრეწირის რადიუსს. რადგან ყველაფერი მიახლოებასთან მიდის, მთავარი შეკითვა არის რამდენად აკურატულად უნდა იყოს ეს წრეწირი და მისი რადიუსი შერჩეული.
მეორე რიგის წარმოებულების გამოთვლა საკმაოდ ძვირი ღირს დროისა და რესურსის თვალსაზრისით. თიმერის ალგორითმი ითვლიდა ზუსტად ამ რადიუსს. ბარნჰილ-კერსეის ალგორითმი კი არჩევდა ნამდვილ რადიუსთან მიახლოება გამოეყენებინა. არც ერთი ალგორითმი არ ცდილობდა ეპოვა ვითონ წრე, მხოლოდ მის რადიუსს იყენებდნენ. შეიძლება ამ წრეწირის გამოყენებაც. მაგალითად ნაბიჯის გადადგმა წრეწირის მხების მიმართულებით და შესაბამისად ნაბიჯის სიგრძედ მისი რადიუსის არჩევა არის შესაძლებელი. ბევრი ალგორითმი ამ მიდგომას იყენებს.

თვითონ წრეწირი მდებარეობა და მისი რადიუსი გამოითვლება წერტილის კოორდინატებიდან და მრუდის რადიუსიდან გამომდინარე.

ამით ვამთავრებთ ამ ალგორითმის აღწერას. ავტორებმა შეადარეს ეს მეთოდი სხვა მეთოდებს. უპირატესობა მდგომარეობდა იმაში რომ ეს ალგორითმი ასევე მუშაობს , როდესაც პარამეტრიზაციის დომეინი არის სამკუთხედებად დაყოფილი, არ არის საჭირო მეორე რიგის წარმოებულები და უფრო რთულ ამოცანებს სწორად უმკლავდება. მუდმივი სიდიდეები შეიძლება შეირჩეს ისე რომ რთული შემთხვევების დროს კარგი შედეგი მივიღოთ.

ჰომოტოპიური მეთოდი

არაცხადი სახით მოცემული ზედაპირების თანაკვეთის პოვნის ამოცანა შეიძლება დაყვანილ იქნას უფრო ზოგადი სახის პრობლემის კერძო შემთხვევამდე - პოლინომიალური განტოლებების სისტემის ამოცანის ამოხსნამდე.   ეს ხდება ჰომოტოპიის გამომყენებით და იდეა მდგომარეობს შემდგომში: პოლინომიალური განტოლებების სისტემისათვის ვპოულობთ ამონახსნს და შემდეგ ტრანსფორმაციის გზით გარდავქმნით მათ და მათ ამონახსნებს ჩვენი სისტემისათვის.
ჰომოტოპიური გარდაქმნის უმარტივესი მაგალითი არის ქვემოთ მოყვანილი:

$$x^2 - xy - 1 = 0 \qquad (13.20)$$

$$y^2 - x - 5 = 0$$

შევნიშნოთ რომ განტოლებები:

$$x^2 - 1 = 0 \qquad (13.21)$$

$$y^2 - 5 = 0$$

მარტივად გარდაიქმენზა შემდეგი სახის განტოლებებში:

$$x^2 - txy - 1 = 0 \qquad (13.22)$$

$$y^2 - tx - 5 = 0$$

როდესაც განვმარტავთ ჰომოტპოიას (13.20) და (13.21). ამიტომ ,რომ გადავწყვიტოთ განტოლება (13.20) ჩვენ ვითვლით მნიშნველობებს განტოლებისთვის (13.21) როდესაც მისი ცვლადი იცვლება 0-დან 1-მდე. ზოგადად ჰომოტოპია შეიძლება განვიხილოთ:

m განზომილებიანი და n უცნობიანი პოლინომიალურ განტოლებათა სისტემა შეესაბამება შემდეგ პილინომიალურ რუქას:

f: $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ და ტოლობას $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (13.23)

ჩვენ ვიღებთ სხვა განტოლებათა სისტემას ტოლობით:

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (13.24)$$

განამრტებულს შემდეგი ასახვით: $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ რომლის ნულოვანი მნიშვნელობებიც ცნობილია და ისინი შეესაბამებიან ჰომოტოპია

$h: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ $g(\mathbf{x})$-სა და $f(\mathbf{x})$-ს შორის განმარტებულს შემდეგი სახით:

$h(\mathbf{x}, t) = (1- t)g(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{x})$ (13.25)

$\mathbf{x}_0$ იყოს ნული $g(x)$-ში. ჩვენი მიზანი არის ვიპოვოთ წირი ¥(t) h-ში რომელიც იწყება $(\mathbf{x}_0,0)$ და მთავრდება $(\mathbf{x}_1,1)$, სადაც $\mathbf{x}_1$ არის f ფუნქციის ნული. უფრო ზუსტად ჩვენ ვეძებთ წირს

¥ : $[0,1] \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$

იმ პირობით რომ

(1) ¥(0) = $(\mathbf{x}_0,0)$

(2) h(¥ (t)) = $\mathbf{0}$, ყველა t € [0,1]

(3) ¥ (1) = $(\mathbf{x}_1,1)$, და $f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$.

¥ (t)-ს საპოვნელად გამოვიყენოთ ფესვის პოვნის სტანდარტული ნიუტონ-რაპსონის მეთოდი და ვიპოვოთ განტოლება 2-ის ამონახსნი.

უნდა აღვნიშნოთ ამ ალგორითმის ორი პოტენციური პრობლემა ასეთი: სხვა ალგორითმებისგან განმასხვავებელი ზოგადი ნიშანი არის , რომ ეს მეთოდი ლოკალურ მიდგომას გარდასახავს გლობალურში. მისი დახმარებით ჩვენ უკვე გვაქვს გარკვეული წარმოდგენა ნულოვანი მნიშვნელობების შესახებ (თუ ჩვენი მიხვედრა ნულოვან მნიშვნელობებთან დაკავშირებით არის საკმარისად არაზუსტი მაშინ ნიუტონი-რაპსონის მეთოდის გამოყენებისას ძალიან გაგვიჭირდება ნულოვან მნიშვნელობებთან მიახლოება) და ჩვენ შეგვიძლია ჩვენი ფუნქციის ყველა ნულოვანი მნიშნველობის აღწერა. ჩვენ მაინც ვიყენებთ იტერაციულ მიდგომას,ხოლო მსგავსი მეთოდის გამოყენებისას როდესაც შესაბამის იაკობიანის მატრიცას აქვს სინგულარობა, მაშინ სასურველ ამონახსნთან მიახლოება არ არის გარანტირებული. უამრავი შრომა იქნა ჩადებული იმისათვის რომ იაკობიანის მატრიცის პრობლემა გადაეჭრათ და ჰომოტოპიის მეთოდი გაეხადათ უფრო ეფექტური.
მეორე თვალსაჩინო პრობლემა რომელიც ამ მეთოდს არაეფექტურს ხდის არის საწყისი ფუნქცია $g(\mathbf{x})$-ს შერჩევა. ორიგინალური მიდგომა არის რომ ავირჩიოთ პოლინომიალური ფუქნცია $g(\mathbf{x})$ რიგით d რომელიც არის $f(\mathbf{x})$ ში შემავალი პოლინომიალების რიგი.

ზედაპირის რეკურსიული დაყოფის მეთოდი

ამ მეოთოდის ზოგადი იდეა მდგომარეობს შემდგომში , რომ ზედაპირი დავყოთ საკმარისად მცირე ზომის ნაწილებად და რომ ეს ნაწილები იყოს ბტყელი. ბეზიეს და ბ-სპლაინის ზედაპირები არის საკმარისად კარგი კანდიდატები საამისოდ რადგან მათ ქვედანაყოფებს აქვთ ასოციაციური კონტროლის ბადეები. შემდეგ ვპოულობთ გეგმილი სიბრტყეების თანაკვეთას , რათა ვიპოვოთ ნამდვილი თანაკვეთის პოლიგონალური თანაკვეთა.

ამ ალგორითმის არჩევის შემთხვევაში შეიძლება მოგვიწიოს დიდი რაოდენობის მონაცმები დამუშავება. მონაცმეების შემცირების ერთი საშუალება არის დაყოფაზე შეზღუდვის დაშვება, ანუ რაღაც ნაბიჯის შემდეგ აღარ მოხდეს თანამკვეთი ზედაპირების დაყოფა. ალგორითმის შესასრულებლად არ არის მთლიანი ზედაპირის დაყოფა საჭირო. აუცილებელია მხოლოდ იმ ნაწილის დაყოფა სადაც მოსალოდნლი კვეთა გვაქს.

თანაკვეთის გამოსარჩევად ხშირად მიმართავენ მოსაზღვრე ყუთების მეთოდს.
იდეა მდგომარეობშ შემდეგში: სეგმენტის, რომელზეც ვიყოფებით , უმცირესი და უდიდესი კოორდინატების დახმარებით ვაგებთ ყუთს, რომელსაც პირობითად ვუწოდოთ მინ-მაქსის ყუთები. ამ მეთოდს ყუთების მარტივი აგებულების გამო ირჩევენ. გაცილებით იოლია მსგავსი ყუთების შემოწმება თანაკვეთაზე ვიდრე თვითონ ზედაპირების. ასევე აუცილებელია რომ გვქონდეს რაიმე შეჩერების კრიტერიუმი. როგორც წესი მსგავსი სახის ნიშანს იძლევა დანაწევრებული ზედაპირის სიბრტყის ტესტი, რომელიც ამ სიბრტყეზე მიმართული ნორმალი ვექტორის დახმარებით მიიღება. რამდენიმე ნორმალი ვექტორის დაშვებისას , თუ ზედაპირი ბრტყელია ის ნორმალები უცვლელია. მიუხედავად ტესტის სიმარტვისა მას საკმაოდ დიდი რესურსი მიაქვს და რაც უფრო უკეთესი შეჩერების კრიტერიუმი გვენქება ხელთ მით უფრო მეტ რესურს დავზოგავთ, ამიტომ უმჯობესია თუ წინასწარ განვსაზღვრავთ ქვეზედაპირების რაოდენობას.
ზოგადად მსგვასი სახის ალგორითმი შედგება ოთხი ფაზისგან: დაყოფა, გადაკვეტა, სორტირება და გამოხშირვა.
თავდაპირველად ზედაპირი იყოფა მანამ სანამ დანაყოფები შეესაბამება წინასწარ განსაზღვრულ სიბრტყეს და კუთხეების სისწორეს. იქმნება შესაძლო თანამკვეთი ზედაპირების სტეკი . გადაკვეთის ტესტი დაფუძნებულია „მიმართულ" მოსაზღვრე ყუთების გადაკვეტაზე. „მიმართული" ყუთები არიან შემოსაზღვრული ყუთები რომლების პირდაპირა არიან განალგებულნი გადაკვეთაზე. დარჩენილი ქვეზედაპირები აგრძელებენ დაყოფას უკეტესი სიბრტყული მაჩვენებლის მისაღებად.
მონაცმების შესანახად ხის სტრუქტურა არის გამოყენებული. როდესაც დანაყოფები არის საკმარისად ბრტყელი, ისინი გამოისახებიან სამკუთხედების საშუალებით და უკვე ამ ორი სამკუთხედის გადაკვეთა არის გამოყენებული ნაწილების თანაკვეთის დასადგენად. ეს წარმოქმნის სეგმენტების კოლექციას რომელთაც სორტირების ფაზა დააკომბინირებს რათა მიიღოს პოლიგონიალური წირი, რომელებიც მერე იქნებიან მიახლოება გადამკვეთი წირისა. რადგან ალგორითმი დაფუძნებულია ადაპტაციურ დაყოფის მეთოდზე. სამკუთხედებს შორის შესაძლოა დარჩენილი იყოს დაშორებები, მაგრამ ალგორითმი მათ ამოწმებს შემდგომში. საბოლოოდ სამკუთხედების თანაკვთა რის მხოლოდ მიახლოება და ამიტომ გამოხშირვის ეტაპზე ვცდილობთ იტერაციულად ვიპოვოთ ზედაპირთან ახლოს მყოფი წერტილები.

ალგებრული მეთოდი

ალგებრული მეთოდი გამოიყენება მხოლოდ ცალკეული შემთხვევების დროს, მაგალითად როდესაც გვაქვს ზედაპირის / ზედაპირთან თანაკვეთა. ვინაიდან შემთხვევა როდესაც ერთი ზედაპირი არის გამოსახული არაცხადი სახით და მეორე ზედაპირი პარამეტრულად , არის შედარებით მარტივად გამოთვლადი - სხვა დანარჩენი შემთხვევები დაიყვანება ამ სახის მოცემულობაზე.

არაცხადი სახით ჩაწერილი ზედაპირი **S** შეიძლება პარამეტრიზირებული . თუ S გამოსახულია წრფივი ან კვადრატული პოლინომით, მაშინ S შესაძლებელია იყოს პარამეტრიზებული სხვა რაციონალური პოლინმიალური ფუნქციით.

უმთავრესი პრობლემა ის არის რომ სტანდარტულმა იმპლიციტურმა ალგორითმებმა შესაძლოა ძალიან რთული ტოლობები მოგვცენ. ამიტომ ალგებრული გეომეტრიის მეთოდი შესაძლოა არაპრაქტიკულად მოგვეჩვენოს ამის გამო. ნებისმიერ შემთხვევაში ცნობილია რომ ალგებრული წირის

$\mathbf{R}_3$ სიბრტყიდან $\mathbf{R}_2$ -ში დაგეგმარება შესაძლებელია . ერთ-ერთი ზოგადი მიდგომა არის:

1. დავაგეგმილოთ გადამკვეთი წირი $\mathbf{R}3$-ში სიბრტყეზე არსებულ წირში რომელიც განმარტებულია $h(u,v) = 0$. (13.23)
2. ამოვხსნათ ეს ტოლობა
3. ამონახსენი დავაგეგმილოთ $\mathbf{R}3$-ში.

აღვწეროთ ორი მიდგომა 1 და 3 ტოლობებისთვის.

პირველი გზა დაფუძნებულია ჩანაცვლებაზე.

ჩანაცვლების მეთოდი

დავუშვათ S1 განმარტებულია შემდეგი ტოლობით: $f(x,y,z) = 0$ (13.24)
და **S**2 განმარტებულია პარამეტული სახით:

$g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v))$.

13.24 ტოლობაში ჩანაცვლ;ება გვაძლევს შემდეგ სახეს:

$h(u,v) = f(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)) = 0$. (13.25)

თუ ჩვენ ტოლობა (13.25) ამოვხსნით u-v ზედაპირისთვის , მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ამონახსნი უკან **R**3-ში გადმოვაგეგმილოთ g ფუნქციის გამოყენებით.
თუ ორივე ზედაპირი მოცემულია პარამეტრული სახით, მაშინ შესაძლებელია ერთ-ერთი მათგანი გამოვსახოთ არაცხადი სახით გრობნერის ბაზისური მიდგომით და ამით დავიყვანოთ პრობლემა წინა მოცემულ მაგალითზე. თუ ორივე იმლიციტურად არის მოცემული , მაშინ ერთ-ერთი გამოისახება პარამეტრული სახით.
მაგრამ სამწუხაროდ ეს ხშირად არ არის შესაძლებელი: იმპლიციტური მოცემულობის გამოსახვა რაციონალური ფუნქციებით. თუმცა შესაძლოა იყოს ნაჩვენები რომ ორი იმლიციტურად მოცემული ფუნქციის თანაკვეთა დევს პარამეტრულ სიბრტყე **X**-ში.
დავუშვათ **S**1 და **S**2 არის ნულოვანი ბადეები ფუნქციების შესაბამისი ფუნქციების: $f(x,y,z)$ და $g(x,y,z)$.
ნაბიჯი 1 . ჰომოგენურად გარდავქმნათ ფუნქცია $f(x,y,z)$ და $g(x,y,z)$ რომ მივიღოთ ჰომოგენური ფუნქციები: $F(x,y,z,w)$ და$G(x,y,z,w)$. ორი ზედაპირის S1 და S2 ის თანაკვეთას არაპირდაპირ შეესაბამებიან წერტილებიმ რომლიებიც ჰომოგენური ჰიპერფუქნციების თანაკვეთისას მიიღება. ეს ფუნქციები შესაბამისად F და G არის განმარტებული.
Step 2. ავირჩიოთ ერთი ცვლადი რომელიც არის F და G-ს და გამოვსახოთ F და Gროგორც ამ ცვლადის პოლინომები ანუ:

$$\begin{aligned} F &= a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots + a_m w^m \\ G &= b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \ldots + b_{m'} w^{m'}, \end{aligned} \qquad (13.26)$$

სადაც a_i და b_j არიან პოლინომები x,y და z. განვსაზღვროთ:

$$F_1 = a_m w^{m-m'} G - b_{m'} F$$
$$G_1 = \frac{a_0 G - b_0 F}{w}. \qquad (13.27)$$

შეგვიძლია ჩავთვალოთ რომ F1 და G1 წარმოიქმნენ F და G ფუნქციებისგან. შევნიშნოთ რომ ორივე არის წრფივი კომბინაცია F და G ფუნქციების და აქედან გამომდინარე მათ მიერ განამრტებული ჰიპერზედაპირების თანკავეთა შეიცავს F და G ფუნქციით გამოსახული ჰიპერზედაპირების თანაკვეთასაც .

Step 3. რადგანაც F1 და G1 რიგი ნაკლებია ვიდრე n, ჩვენ გავიმეორებთ მეორე ნაბიჯს და შესაბამისად ვაგენერირებთ პოლინომების Fi და Gi მიმდევრობას, სანამ საბოლოოდ არ დავამთავრებთ პოლინომებით რომელთა რიგიც არის 1. ამ წრფივი პოლინომიალის გამოყენებით ჩვენ ხედავთ, რომ ჩვენი ჰომოგენური გადაკვეთა არის ჰიპერსივრცეში რომელიც შემდეგი განტოლებით არის განმარტებული:

$$H(x,y,z,w) = wH_1(x,y,z) + H_2(x,y,z) = 0. \qquad (13.28)$$

ინდუქციური დაშვებით პოლინომი H არის F და G-ს წრფივი კომბინაცია.

Step 4. ჰიპერსივრცე რომელიც განმარტებულია (13.28) შესაძლოა პარამეტრიზებულ იქნას (ჰომოგენური კოორდინატებით)

$$x(r,s,t) = r$$
$$y(r,s,t) = s$$
$$z(r,s,t) = t$$
$$w(r,s,t) = -\frac{H_2(r,s,t)}{H_1(r,s,t)}. \qquad (13.29)$$

G-ს ფორმულაში ამ ფუნქციების ჩასმით, ჩვენ ვღებულობთ ჰომოგენურ წირს . ამ წირის დეჰომოგენირირებით ჩვენ ვღებულობთ აფინურ წირს რომელიც უკვე გამოთვლადია.

დაგეგმარების მეთოდი

იდეა მდგომარეობს შემდეგში: რაიმე P წერტილიდან მოყოლებული ჩვენ ვაგეგმილებთ სიბრტყეზე სივრცულ წირს.

Step 1. სიბრტყის ტოლობები გარდავსახოთ წრფივი გარდასახვებით , რომელიც განმარტებულია კოეფიციენტების მატრიცის სახით.

Step 2. მიღებული შედეგი გამოვიყენოთ რომ გადაკვეთა დავაგეგმილოთ.

Step 3. შემთხვევითი შერჩევით ჩავანაცვლოთ კოეფიციენტები მატრიცაში და შევამოწმოთ გეგმილი.

საკმაოდ მარტივი ალგორითმი არის აღსაწერად, მაგრამ ასევე საკმაოდ რთული გამოთვლები არის ჩასატარებელი ზუსტი შედეგის მისაღებად.

დასკვნა

ზოგადად განვიხილოთ თითოეული მეთოდი:

1. სიბრტყის დაყოფის მეთოდი . ამ მეთოდის მთავარი პრობლემა გაჩერების კრიტერიუმის შერჩევა არის. რადგან თუ ეს პირობა არასწორად იქნება შერჩეული, მაშინ მაღალი ალბათობით ჩვენ გამოვტოვებთ პატარა მარყუჟებს, ცალკეულ წერტილებს და შესაძლოა გადამკვეთი წირის მთელი რიგი მონაცემები არასწორად მივიღოთ.
2. მესერის მეთოდი . ეს მეთოდები პრობლემას ანაწევრებენ უფრო პატარა ამოცანებად , ისეთებად როგორც წერი-ზედაპირის თანაკვეთა. ამას მოყვება მკვეთი წირის სასრული რაოდენობა წერტილების შეერთება. დისკრეტული ნაბიჯის გამოთვლა არის საკმაოდ რთული შეიძლება მთლიანად გამოგვრჩეს ყველა პატარა მარყუჟი და ცალკე მდგომი წერტილები. როგორც წესი მსგავსი სახის მეთოდები მხოლოდ საწყისი წერტილების შეგროვების მიზნით გამოიყენება.
3. ანალიტიკური მეთდები - როგორც წესი ეს მეთოდები ძალიან სპეციფიური შემთხვევებისთვის გამოიყენება.
4. მარშირების მეთოდები . ამ მეთოდის იდეა მდგომარეობს გადამკვეთი წირების ფორმულირებაში, საწყისი წერტილის შერჩევაში და ლოკალური გეომეტრიის გამოყენებით კვალის მიდევნებაში. გადამკვეთი წირი შეიძლება იყოს არაცხადი სახით გამოსახული, შეიძლება ჩავწეროთ როგორც წირი, რომელიც ორი ზედაპირიდან ნულოვანი მანძილით არის დაშორებული ან როგორც ვექტორთა ველი.

თვითონ წირის კომპონენტები შედგება მოსაზღვრე სეგმენტებისგან და მარყუჟებისგან. საწყისი წერტილების შერჩევა ხდება წირისა და ზედაპირის თანაკვეთის საფუძველზე. ასევე უამრავი მეთოდი ქინა შემუშავებული რათა მოხდეს მარყუჟების მაქსიმალურად გამორიცხვა. ისინი ძირითადად დაფუძნებული გაუსის რუქების საზღვრების ალგორითმზე და ყოფენ ყოველ ზედაპირს სანამ მარყუჟის არარსებობის პირობები დაკმაყოფილდება. ეს ალგორითმები კარგად მუშაობენ იმ შემთხვევაში როდესაც ზედაპირეი გლუვი არის და

ეფექტურნი არიან ცალკე მდგომი მარყუჟის შესარჩევად. თუმცა ეს მეთოდები საკმაოდ ნელია.

ზედაპირების შემთხვევაში ცალკეული წერტილების პოვნა გადამკვეთ წირზე შეიძლება ალგებრული განტოლებების საშალებით, მაგრამ ჯერჯერობით არ არის ცნობილი რომელიმე მეთოდი, რომელიც უფრო მაღალი რიგის ზედაპირების.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Max K. Agoston - Computer Graphics and Geometric Modeling Implementation and Algorithms Max K. Agoston, MA, MS, PhD   Cupertino, CA 95014, USA
2. Huber, E. and W. Barth. Surface-to-surface intersection with complete and guaranteed results. In: Developments in Reliable Computing, edited by T. Csendes, Kluwer Academic Publishers, pp. 185-198, The Netherlands, 1999.
3. Homotopy Analysis Method for a Fin with Temperature Dependent Internal HeatGeneration and Thermal Conductivity. K. Hosseini, B. Daneshian, N. Amanifard, R. Ansari. ISSN 1749-3889 (print), 1749-3897 (online) International Journal of Nonlinear Science Vol.14(2012) No.2,pp.201-210
4. https://www.cs.purdue.edu/homes/cmh/distribution/books/chap6.pdf
5. A critical evaluation of force term in lattice Boltzmann method, natural convection problem. A.A. Mohamad*, A. Kuzmin. Department of Mechanical and Manufacturing Engineering, Schulich School of Engineering, University of Calgary, 2500 University Drive NW, Calgary, Alta., Canada T2N 1N4