თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის მიმართულების სტუდენტ

ზურაბ ვაშაკიძის

საბაკალავრო ნაშრომი თემაზე:

”ბზარებით შესუსტებული შედგენილი სხეულებისათვის დრეკადობის თეორიის ანტიბრტყელი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის სასრულ-სხვაობიანი მეთოდის შესახებ”

ხელმძღვანელი: არჩილ პაპუკაშვილი

თბილისი, 2014 წლის 10 ივლისი

რეზიუმე:

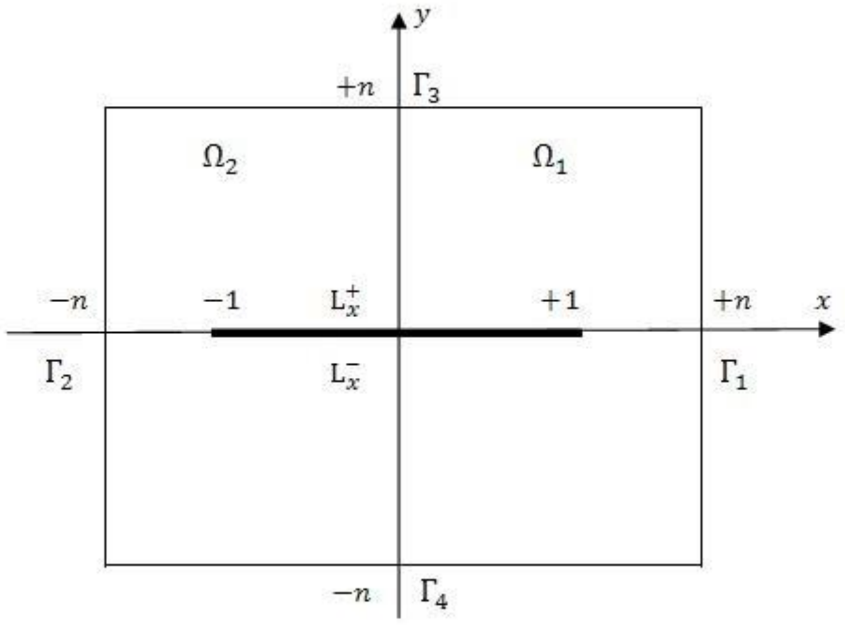
საბაკალავრო ნაშრომში შესწავლილია ბზარებით შესუსტებული უბნობრივ ერთგვაროვანი მართკუთხა განივკვეთის მქონე სხეულისთვის დრეკადობის თეორიის ანტიბრტყელი ამოცანების ამოხსნის სასრულ-სხვაობიანი მეთოდი. დიფერენციალური განტოლება შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით აპროქსიმირდება სხვაობიანი ანალოგით. ამოცანის ასეთი დასმა საშუალებას იძლევა უშუალოდ ვიპოვნოთ გადაადგილების ფუნქციის რიცხვითი მნიშვნელობები ბადის კვანძებში. შემოთავაზებული სათვლელი ალგორითმები აპრობირებულია კონკრეტული პრაქტიკული ამოცანისთვის და თვლის შედეგი კარგ მიახლოებაშია თეორიული კვლევით მიღებულ შედეგთან.

შესავალი:

სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას ბზარებით შესუსტებული შედგენილი სხეულებისათვის დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. გამოსაკვლევი ამოცანების მათემატიკური მოდელის საწყის მიახლოებად შეიძლება გამოყენებული იქნას დრეკადობის ანტიბრტყელი თეორიის განტოლებები ბზარებით შესუსტებული შედგენილი (უბნობრივ-ერთგვაროვანი) სხეულებისთვის. ბზარის ამოცანას სასრულ-სხვაობიანი მეთოდით ორთოტროპულ (კერძო შემთხვევაში იზოტროპულ) სხეულისათვის კვადრატული არის შემთხვევაში, საწყის ეტაპზე ვიხილავთ ერთგვაროვანი, შემდეგ კი უბნობრივ-ერთგვაროვანი სხეულისათვის. ზემოაღნიშნული ამოცანების თეორიული კვლევის გარდა ჩვენი მიზანია ავაგოთ სწრაფად კრებადი რიცხვითი მეთოდი.

თავი 1: ბზარის ამოცანა ერთგვაროვანი სხეულისათვის.

- ***§1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს***



განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0, \ (x,y) \in \Omega \quad (1.1.1)$$

ბზარეზე გვაქვს პირობა

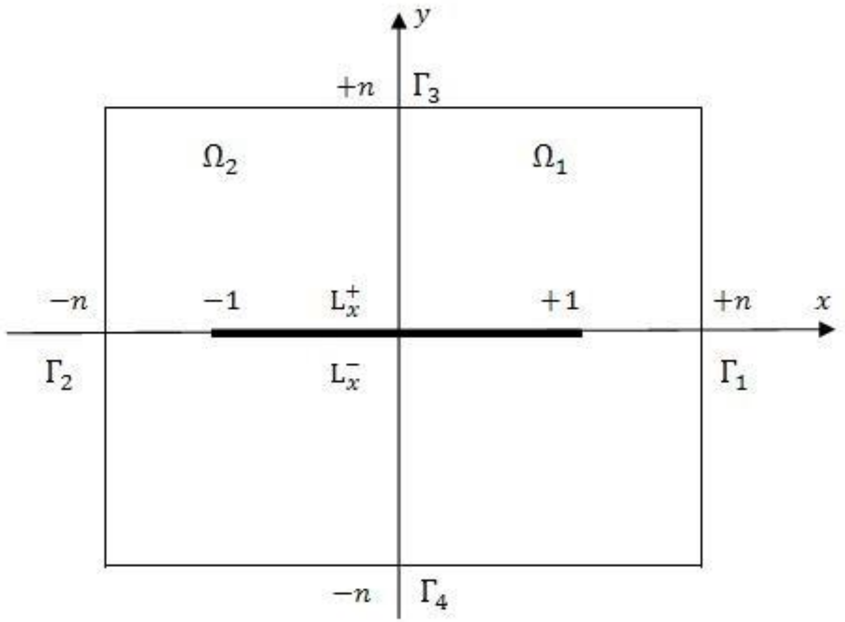
$$\tau_{yz}^{(+)} = b_{44} \frac{\partial w(x,+0)}{\partial y} = q^{(+)}(x), \qquad x \in L$$

(1.1.2)

$$\tau_{yz}^{(-)} = b_{44} \frac{\partial w(x,-0)}{\partial y} = q^{(-)}(x), \qquad x \in L$$

შეთანხმების პირობები: $w(1,+0) = \ w(1,-0)$, $\quad w(-1,+0) = w(-1,-0)$

- ***§1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს***



სადაც $\lambda^2 = \frac{b_{44}}{b_{55}}$, b_{44} , b_{55} დრეკადი მუდმივებია ორთოტროპული სხეულის უშუალოდ ჰუკის კანონიდან აღებული, იზოტროპულ შემთხვევაში

$\lambda^2 = 1$, $b_{44} = \mu$, $\mu -$ ძვრის მოდულია,

$q^{(\pm)}(x)$ ჰელდერის კლასის ფუნქციაა,

სიმეტრიული დატვირთვის დროს

$q^{(+)}(x) = q^{(-)}(x) = q(x)$

$L_1 = [0,1]$, $L_2 = [-1,0]$, $L = L_1 \cup L_2$

$\overline{\Omega} = \Omega_1 \cup \Omega_2 = \{(x,y)$, $x \in (-n,n)$, $y \in (-n,n)\}$; $\Omega = \overline{\Omega} \setminus (L_1 \cup L_2)$

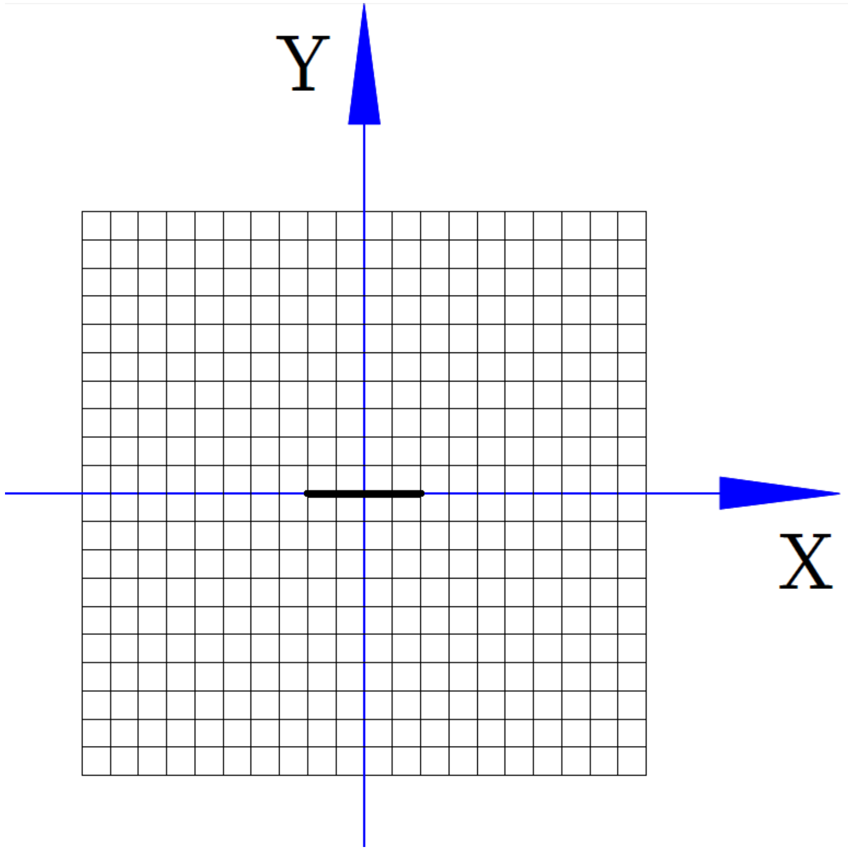
ბზარის ბოლოებში უნდა სრულდებოდეს **შეთანხმების პირობა**

$w(1,+0) = w(1,-0)$, $w(-1,+0) = w(-1,-0)$ (1.1.4)

თავი 1: ბზარის ამოცანა ერთგვაროვანი სხეულისათვის.

- §1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს
- ***§1.2 სხვაობიანი ბადე.***

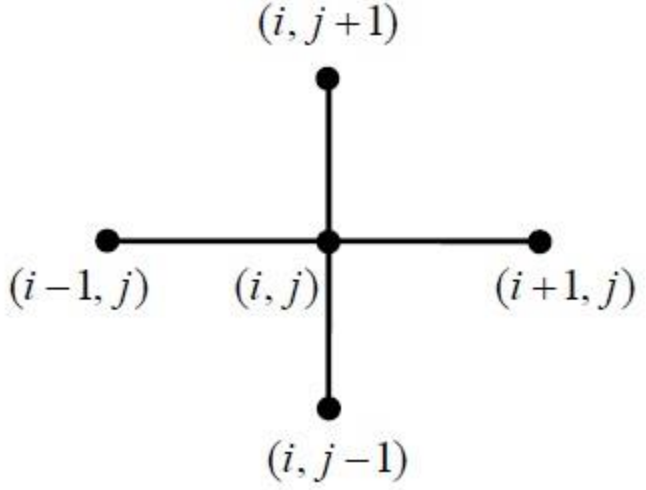
ვთქვათ n ფიქსირებულია. განვიხილოთ სხვაობიანი რეგულარული კვადრატული ბადე ბიჯით $h_1 = h_2 = h = 1/N, N \in \mathbb{N}$.



თავი 1: ბზარის ამოცანა ერთგვაროვანი სხეულისათვის.

- §1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს
- §1.2 სხვაობიანი ბადე.
- *§1.3 სხვაობიანი ანალოგი (სქემა)*

(1.1.1) განტოლებას ($\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0$) ვცვლით $O(h^2)$ სიზუსტის სქემით.



ხუთწერილოვანი შაბლონი

- §1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს
- §1.2 სხვაობიანი ბადე.
- *§1.3 სხვაობიანი ანალოგი (სქემა)*

ბზარის (1.1.2) პირობას ვცვლით $O(h)$ სიზუსტის სქემით.

ბზარების ბოლოებში თავსებადობის პირობები გადატანილი სხვაობიან ბადეზე მიიღებს სახეს:

$$W_{-N,(+0)} = W_{-N,(-0)} \equiv W_{-N,0}$$

$$(1.1.4*)$$

$$W_{N,(+0)} = W_{N,(-0)} \equiv W_{N,0}.$$

თავი 1: ბზარის ამოცანა ერთგვაროვანი სხეულისათვის.

- **§1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს**
- **§1.2 სხვაობიანი ბადე.**
- ***§1.3 სხვაობიანი ანალოგი (სქემა)***

მიღებული განტოლებები გადავწეროთ იტერაციული სახით:

$$W_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{2(1+\lambda^2)}\left[W_{i+1,j}^{(k)} + W_{i-1,j}^{(k)} + W_{i,j+1}^{(k)} + W_{i,j-1}^{(k)}\right].$$

ბზარზე პირობები:

$$W_{i,(+0)}^{(k+1)} = W_{i,(+1)}^{(k)} - \frac{h}{b_{44}}\, q_i^{(+)} \text{ და } W_{i,(-0)}^{(k+1)} = W_{i,(-1)}^{(k)} - \frac{h}{b_{44}}\, q_i^{(-)}.$$

ბზარის ბოლოებში პირობები:

$$W_{(-N),(+0)}^{(k+1)} = W_{(-N),(-0)}^{(k+1)} \text{ და } W_{N,(+0)}^{(k+1)} = W_{N,(-0)}^{(k+1)}.$$

ხისტად ჩამაგრების პირობა:

$$W_{nN,j}^{(k)} = 0 \text{ და } W_{(-nN),j}^{(k)} = 0;\ W_{i,nN}^{(k)} = 0 \text{ და } W_{i,(-nN)}^{(k)} = 0$$

შეთანხმების პირობა: $q_N^{(+)} = q_N^{(-)}\ ,\quad q_{(-N)}^{(+)} = q_{(-N)}^{(-)};$

თავი 2: ბზარის ამოცანა უბნობრივ-ერთგვაროვანი სხეულისათვის

- ***§1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს***

მოცემულია განტოლება

$$\frac{\partial^2 w_k(x,y)}{\partial x^2} + \lambda_k^2 \frac{\partial^2 w_k(x,y)}{\partial y^2} = 0, \ (x,y)\epsilon\Omega_k \quad (2.1.1)$$

ა) ბზარის საზღვარზე მოცემულია მხები ძაბვები,

ხოლო ბზარის ბოლოებში, კი შეთანხმების პირობები:

$$\tau_{yz}^{(\pm)} = b_{44}^{(k)} \frac{\partial w_k(x,\pm 0)}{\partial y} = q_k^{(\pm)}(x), \qquad x\epsilon L_k$$

$$w_2(-1,+0) = w_2(-1,-0), \qquad w_1(1,+0) = w_1(1,-0)$$

ბ) y ღერძზე (გამყოფ საძღვარზე) სრულდება უწყვეტობის პირობები:

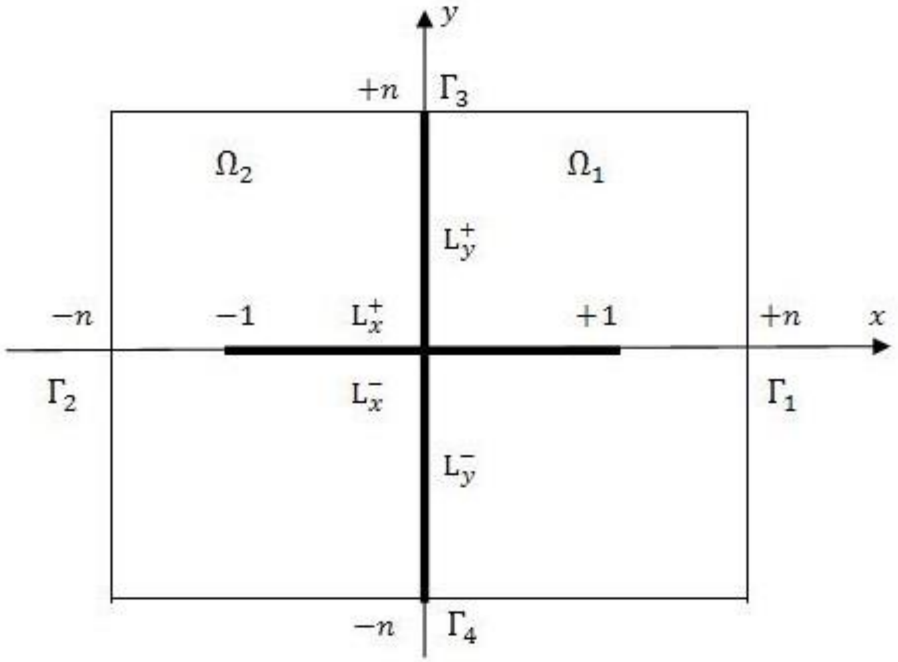
$$w_1(0;y) = w_2(0;y), y \in [-n,n], y \neq 0$$

$$\tau_{xz}^{(1)} = \tau_{xz}^{(2)}, \text{ ანუ } b_{55}^{(1)} \frac{\partial w_1(0;y)}{\partial x} = b_{55}^{(2)} \frac{\partial w_2(0;y)}{\partial x}$$

ხოლო Ω კვადრატის გვერდებზე კი შემდეგი სასაზღვრო პირობა:

$w_2(-n,y) = 0$ და $w_1(n,y) = 0, \qquad y\epsilon[-n,n],$

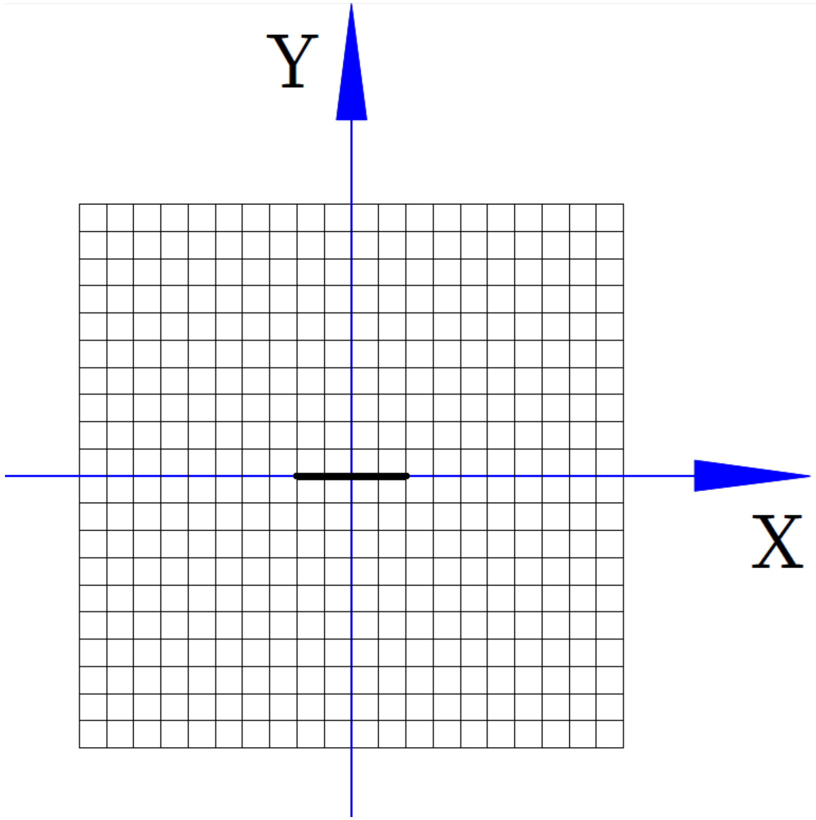
$w_2(x,\pm n) = 0, x\epsilon[-n,0]$ და $w_1(x,\pm n) = 0, \qquad x\epsilon[0,n].$



თავი 2: ბზარის ამოცანა უბნობრივ-ერთგვაროვანი სხეულისათვის

- §1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს
- *§2.2 სხვაობიანი ბადე*

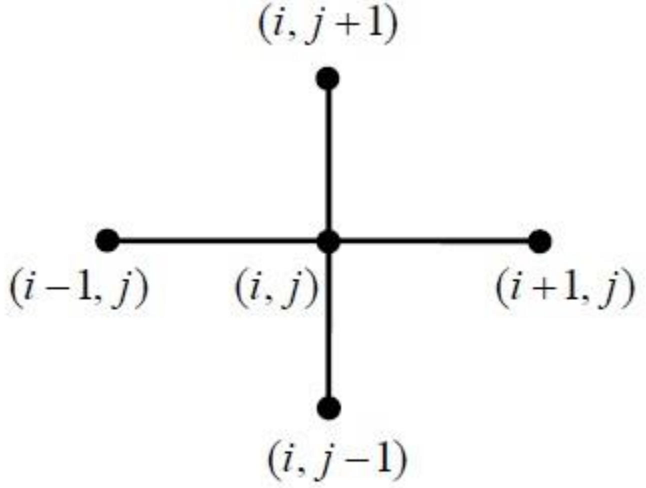
ვთქვათ n ფიქსირებულია. განვიხილოთ სხვაობიანი რეგულარული კვადრატული ბადე ბიჯით $h_1 = h_2 = h = 1/N, N \in \mathbb{N}$.



თავი 2: ბზარის ამოცანა უბნობრივ-ერთგვაროვანი სხეულისათვის

- §1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს
- §2.2 სხვაობიანი ბადე
- *§2.3 სხვაობიანი ანალოგი (სქემა)*

(2.1.1) განტოლებას ($\frac{\partial^2 w_k(x,y)}{\partial x^2} + \lambda_k^2 \frac{\partial^2 w_k(x,y)}{\partial y^2} = 0$) ვცვლით $O(h^2)$ სიზუსტის სქემით.



ხუთწერტილოვანი შაბლონი

თავი 2: ბზარის ამოცანა უბნობრივ-ერთგვაროვანი სხეულისათვის

- §1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს
- §2.2 სხვაობიანი ბადე
- *§2.3 სხვაობიანი ანალოგი (სქემა)*

ბზარის პირობას ვცვლით $O(h)$ სიზუსტის სქემით:

$$\boldsymbol{b_{44}^{(1)}\,\frac{W_1(x_i,y_1)-\ W_1(x_i,+0)}{h}=q_{(1)}^{(+)}(x_i)\,,\qquad x_i\epsilon L_{1h}^{+};}$$
$$\boldsymbol{b_{44}^{(1)}\,\frac{W_1(x_i,y_{-1})-\ W_1(x_i,-0)}{h}=q_{(1)}^{(-)}(x_i)\,,\qquad x_i\epsilon L_{1h}^{-};}$$
$$\boldsymbol{b_{44}^{(2)}\,\frac{W_2(x_i,y_1)-\ W_2(x_i,+0)}{h}=q_{(2)}^{(+)}(x_i)\,,\qquad x_i\epsilon L_{2h}^{+};}$$
$$\boldsymbol{b_{44}^{(2)}\,\frac{W_2(x_i,y_{-1})-\ W_2(x_i,-0)}{h}=q_{(2)}^{(-)}(x_i)\,,\qquad x_i\epsilon L_{2h}^{-};}$$

ოთხი განტოლების თავსებადობისათვის (x_0,y_0) წერტილში აუცილებელია

$\boldsymbol{\frac{q_{(1)}^{(+)}(0)}{b_{44}^{(1)}}}\equiv\boldsymbol{\frac{q_{(2)}^{(+)}(0)}{b_{44}^{(2)}}}$ და $\boldsymbol{\frac{q_{(1)}^{(-)}(0)}{b_{44}^{(1)}}}\equiv\boldsymbol{\frac{q_{(2)}^{(-)}(0)}{b_{44}^{(2)}}}$.

თავი 2: ბზარის ამოცანა უბნობრივ-ერთგვაროვანი სხეულისათვის

- §1.1 ბზარის ამოცანის დასმა, როდესაც ბზარი კვეთს გამყოფ საზღვარს
- §2.2 სხვაობიანი ბადე
- *§2.3 სხვაობიანი ანალოგი (სქემა)*

მიღებული განტოლებები გადავწეროთ იტერაციული სახით:

$$\boldsymbol{W_{k,i,k,j}^{(m+1)} = \frac{1}{2\left(1+\lambda_k^2\right)}\left[W_{k,i+1,j}^{(m)} + W_{k,i-1,j}^{(m)} + W_{k,i,j+1}^{(m)} + W_{k,i,j-1}^{(m)}\right]};$$

სხვაობიანი სქემა **გამყოფი საზღვრის** კვანძებში შაიწერება შემდეგი სახით:

$$\boldsymbol{W_{1,0,j} = W_{2,0,j} \equiv W12_{0,j}};$$

$$\boldsymbol{j = -nN, (nN-1), -(nN-2), \ldots, (-1)};$$

$$\boldsymbol{j = 1, \ldots, (nN-2), (nN-1), nN};$$

$$\boldsymbol{b_{55}^{(2)} \frac{W_{2,0,j} - W_{2,-1,j}}{h} = b_{55}^{(1)} \frac{W_{1,1,j} - W_{1,0,j}}{h}};$$

როცა $\boldsymbol{b_{55}^{(1)} = b_{55}^{(2)}}$, მაშინ $\boldsymbol{W12_{0,j} = \frac{1}{2}\left(W_{1,1,j} + W_{2,-1,j}\right)}$.

როცა $\boldsymbol{b_{55}^{(1)} \neq b_{55}^{(2)}}$, მაშინ $\boldsymbol{W12_{0,j} = \frac{b_{55}^{(2)} W_{2,-1,j} + b_{55}^{(1)} W_{1,1,j}}{b_{55}^{(2)} + b_{55}^{(1)}}}$.

თავი 3: პროგრამული კოდები და რიცხვითი გათვლები

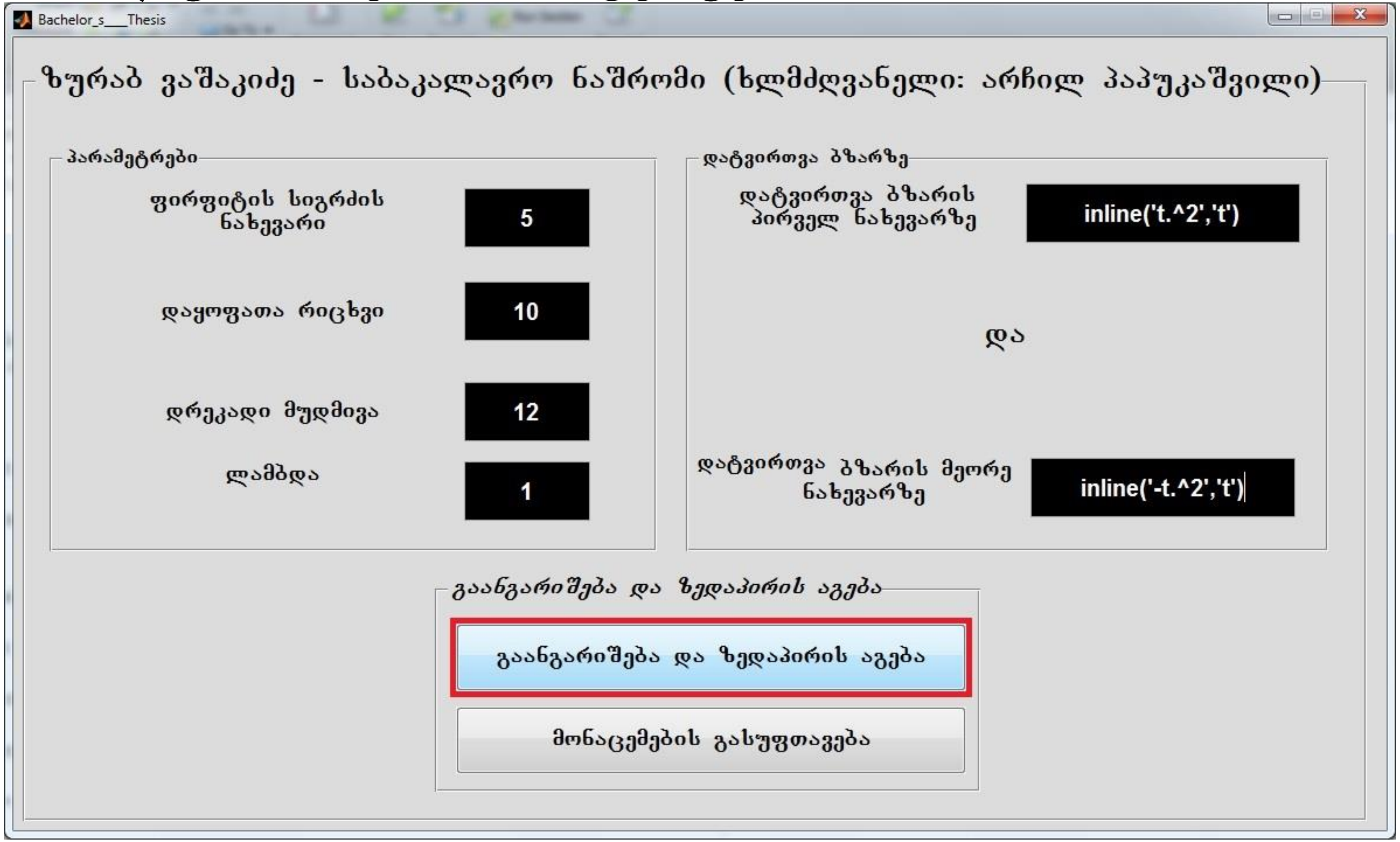
- *<u>პროგრამული კოდის ფრაგმენტი</u>*

```
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)

syms t
n = str2num(get(handles.edit1,'String'));
N = str2num(get(handles.edit2,'String'));
b44 = str2num(get(handles.edit3,'String'));
lambda = str2num(get(handles.edit4,'String'));
h = 1/N;
x = rand(2*n*N + 1,1);
x(1) = -n;
for i = 2:(2*n*N + 1);
    x(i) = x(1) + h*(i - 1);
end
```

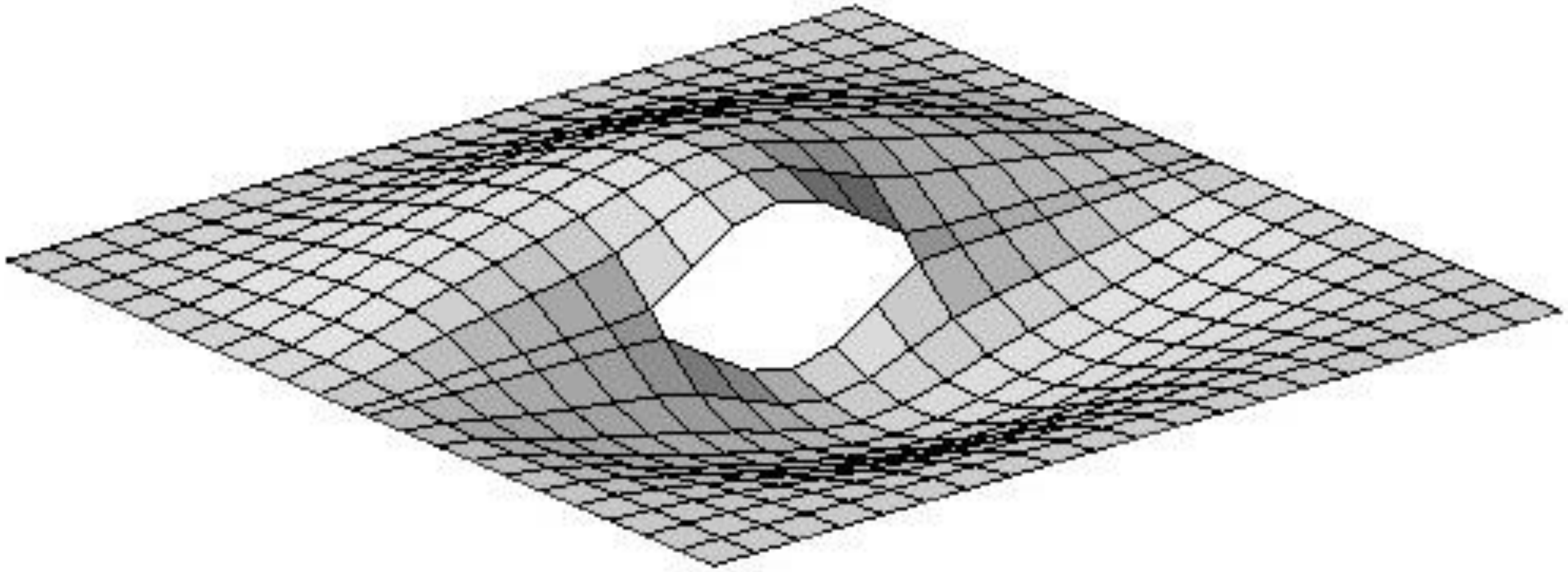
თავი 3: პროგრამული კოდები და რიცხვითი გათვლები

- პროგრამული კოდის ფრაგმენტი
- *სამუშაო დაფა (პროგრამის ინტერფეისი)*



თავი 3: პროგრამული კოდები და რიცხვითი გათვლები

- პროგრამული კოდის ფრაგმენტი
- სამუშაო დაფა (პროგრამის ინტერფეისი)
- *პროგრამის გაშვების შემდეგ აგებული ზედაპირი*



დიდი მადლობა ყურადღებისათვის